

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ**

**DIOGO DE ANDRADE ROCHA**

**KAUAN PIETRO CHISTÉ**

**IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA: APLICAÇÃO  
EM TRANSFORMADORES DE POTÊNCIA**

**CURITIBA**

**2025**

**DIOGO DE ANDRADE ROCHA  
KAUAN PIETRO CHISTÉ**

**IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA: APLICAÇÃO  
EM TRANSFORMADORES DE POTÊNCIA**

**FREQUENCY DOMAIN SYSTEM IDENTIFICATION: APPLICATION IN POWER  
TRANSFORMERS**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Controle e Automação do Curso de Engenharia de Controle e Automação da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Lucas Pioli Rehbein Kürten Ihlenfeld.

**CURITIBA  
2025**



[4.0 Internacional](#)

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es). Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

**DIOGO DE ANDRADE ROCHA  
KAUAN PIETRO CHISTÉ**

**IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA: APLICAÇÃO  
EM TRANSFORMADORES DE POTÊNCIA**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Controle e Automação do Curso de Engenharia de Controle e Automação da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Data de aprovação: 26 / novembro / 2025

---

Lucas Pioli Rehbein Kürten Ihlenfeld  
Doutorado  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

---

Victor Baptista Frenci  
Doutorado  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

---

Narco Afonso Ravazzoli Maciejewski  
Doutorado  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

**CURITIBA  
2025**

## **AGRADECIMENTOS**

Agradecemos, primeiramente, às nossas famílias, que sempre nos deram suporte e motivação diante de todas as adversidades encontradas nessa jornada.

À Deus, por estar conosco em todos os momentos.

Ao nosso orientador, Prof. Dr. Lucas Pioli Rehbein Kürten Ihlenfeld, por todo o conhecimento compartilhado, pela disposição em nos auxiliar e pelo tempo dedicado.

Aos nossos amigos e colegas pelo apoio acadêmico e pessoal ao longo deste período de nossas vidas, por todos os momentos juntos.

Estendemos nossa mais sincera gratidão a todos que, direta ou indiretamente, tornaram possível a realização deste trabalho.

Especialmente, agradecemos à Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) por todo o amparo, assistência, ensinamentos e oportunidades ao longo da nossa graduação.

“Toda tecnologia suficientemente avançada é indistinguível da magia.” (Clarke, 1962).

## **RESUMO**

Este trabalho apresenta um método de identificação de sistemas no domínio da frequência aplicado a transformadores de potência, utilizando dados reais obtidos por meio de medições e baseado no algoritmo *Vector Fitting*. Inicialmente, são apresentados os diferentes tipos de modelagem, com ênfase na abordagem de caixa-preta utilizada neste estudo para a modelagem no domínio da frequência. Também são discutidas diferentes formas de representação de modelos nos domínios do tempo e da frequência, além de um comparativo entre as matrizes empregadas para descrever sistemas elétricos. Em seguida, são definidos os procedimentos experimentais para a obtenção dos parâmetros de admitância, impedância e espalhamento, utilizando analisadores vetoriais de rede. Por fim, são apresentados três estudos de caso distintos: um modelo sintético, um baseado em dados reais de transformador medido por terceiros e um proveniente de medições próprias, contemplando todas as etapas do processo de identificação. Os resultados obtidos são avaliados segundo critérios de validação que refletem características e propriedades físicas do transformador. Os estudos de caso demonstram a capacidade do método em reproduzir o comportamento dinâmico do sistema com elevada precisão. A partir da métrica NRMSE, observou-se desempenho praticamente ideal no caso sintético, boa qualidade de ajuste ao utilizar dados reais e resultado ainda mais preciso no estudo experimental conduzido pelos autores. Esses valores evidenciam a robustez do algoritmo *Vector Fitting* mesmo diante de condições práticas de medição, reforçando sua aplicabilidade na identificação de transformadores de potência em ampla faixa de frequência.

**Palavras-chave:** transformadores elétricos; identificação de sistemas; resposta em frequência; modelagem caixa-preta.

## ABSTRACT

This work presents a system identification method in the frequency domain applied to power transformers, using real measurement data and based on the Vector Fitting algorithm. Initially, different modeling approaches are introduced, with emphasis on the black-box approach adopted in this study for frequency-domain modeling. Different forms of model representation in the time and frequency domains are also discussed, along with a comparison of the matrices used to describe electrical systems. Subsequently, the experimental procedures for obtaining admittance, impedance, and scattering parameters using vector network analyzers are defined. Finally, three distinct case studies are presented: a synthetic model, one based on real transformer data measured by third parties, and one obtained from measurements conducted by the authors, covering all stages of the identification process. The resulting models are evaluated using validation criteria that reflect physical characteristics and properties of the transformer. The case studies demonstrate the ability of the method to accurately reproduce the dynamic behavior of the system. Based on the NRMSE metric, the method achieved nearly ideal performance in the synthetic case , good fitting quality when using real data, and an even more accurate result in the experimental study conducted by the authors. These values highlight the robustness of the Vector Fitting algorithm even under practical measurement conditions, reinforcing its applicability to power transformer identification over a wide frequency range.

Keywords: electric transformers; system identification; frequency response; black-box modeling.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1 – Modelo caixa-preta com <math>N</math> entradas (<math>u_1(t), \dots, u_N(t)</math>) e <math>M</math> saídas (<math>y_1(t), \dots, y_M(t)</math>). ....</b>	<b>20</b>
<b>Figura 2 – Ciclo de histerese típico. ....</b>	<b>35</b>
<b>Figura 3 – Sequência de etapas para determinação do modelo de circuito equivalente. ....</b>	<b>36</b>
<b>Figura 4 – Modelo nominal de 60 Hz simplificado do circuito equivalente do transformador. ....</b>	<b>37</b>
<b>Figura 5 – Analisador de redes E5061B ENA <i>Vector Network Analyzer</i> da Keysight. ....</b>	<b>38</b>
<b>Figura 6 – Curvas de magnitude dos elementos de admitância medidos de um transformador. ....</b>	<b>47</b>
<b>Figura 7 – Curvas de magnitude da resposta em frequência — Estudo de Caso 1....</b>	<b>49</b>
<b>Figura 8 – Fase da resposta em frequência — Estudo de Caso 1....</b>	<b>50</b>
<b>Figura 9 – Erro RMS em função da ordem de ajuste — Estudo de Caso 1....</b>	<b>52</b>
<b>Figura 10 – Critério AIC em função da ordem de ajuste — Estudo de Caso 1. ....</b>	<b>53</b>
<b>Figura 11 – Curvas de magnitude do ajuste obtido — Estudo de Caso 1....</b>	<b>54</b>
<b>Figura 12 – Curvas de magnitude da resposta em frequência — Estudo de Caso 2....</b>	<b>54</b>
<b>Figura 13 – Fase da resposta em frequência — Estudo de Caso 2....</b>	<b>55</b>
<b>Figura 14 – Erro RMS em função da ordem de ajuste — Estudo de Caso 2....</b>	<b>56</b>
<b>Figura 15 – Critério AIC em função da ordem de ajuste — Estudo de Caso 2. ....</b>	<b>57</b>
<b>Figura 16 – Curvas de magnitude do ajuste obtido — Estudo de Caso 2....</b>	<b>57</b>
<b>Figura 17 – Autovalores da condutância antes do ajuste via <i>Vector Fitting</i> — Estudo de Caso 2. ....</b>	<b>58</b>
<b>Figura 18 – Autovalores da condutância após o ajuste via <i>Vector Fitting</i> — Estudo de Caso 2....</b>	<b>59</b>
<b>Figura 19 – Transferência de tensão <math>V_{HL}</math> com dados originais — Estudo de Caso 2. ....</b>	<b>60</b>
<b>Figura 20 – Transferência de tensão <math>V_{LH}</math> com dados originais — Estudo de Caso 2. ....</b>	<b>60</b>
<b>Figura 21 – Transferência de tensão <math>V_{HL}</math> com dados ajustados — Estudo de Caso 2. ....</b>	<b>61</b>
<b>Figura 22 – Transferência de tensão <math>V_{LH}</math> com dados ajustados — Estudo de Caso 2. ....</b>	<b>62</b>
<b>Figura 23 – Curvas de aderência ao modelo teórico — Estudo de Caso 2. ....</b>	<b>62</b>
<b>Figura 24 – Arranjo experimental utilizado para a coleta de dados. ....</b>	<b>63</b>
<b>Figura 25 – VNA utilizado na medição dos dados. ....</b>	<b>64</b>
<b>Figura 26 – Curvas de magnitude em parâmetros de espalhamento medidos — Estudo de Caso 3. ....</b>	<b>65</b>
<b>Figura 27 – Fase dos parâmetros de espalhamento medidos — Estudo de Caso 3. ....</b>	<b>65</b>
<b>Figura 28 – Curvas de magnitude dos parâmetros de admitância medidos — Estudo de Caso 3. ....</b>	<b>66</b>
<b>Figura 29 – Ângulo de fase dos parâmetros de admitância medidos — Estudo de Caso 3. ....</b>	<b>66</b>
<b>Figura 30 – Erro RMS em função da ordem de ajuste — Estudo de Caso 3. ....</b>	<b>67</b>
<b>Figura 31 – Critério AIC em função da ordem de ajuste — Estudo de Caso 3. ....</b>	<b>67</b>
<b>Figura 32 – Curvas de magnitude do ajuste obtido — Estudo de Caso 3. ....</b>	<b>68</b>
<b>Figura 33 – Autovalores da condutância antes do ajuste via <i>Vector Fitting</i> — Estudo de Caso 3. ....</b>	<b>69</b>
<b>Figura 34 – Autovalores da condutância após o ajuste via <i>Vector Fitting</i> — Estudo de Caso 3. ....</b>	<b>69</b>
<b>Figura 35 – Transferência de tensão com dados originais — Estudo de Caso 3. ....</b>	<b>70</b>
<b>Figura 36 – Transferência de tensão com dados ajustados — Estudo de Caso 3. ....</b>	<b>71</b>

**Figura 37 – Curvas de aderência ao modelo teórico — Estudo de Caso 3. .... 71**

## **LISTA DE TABELAS**

<b>Tabela 1 – Autovalores mínimos e respectivas frequências — Estudo de Caso 2.....</b>	<b>58</b>
<b>Tabela 2 – Autovalores mínimos e respectivas frequências — Estudo de Caso 3.....</b>	<b>70</b>
<b>Tabela 3 – Valores do NRMSE para cada estudo de caso. ....</b>	<b>72</b>

## **LISTA DE QUADROS**

<b>Quadro 1 – Esquemas de ponderação recomendados no <i>Vector Fitting</i>.</b> .....	<b>33</b>
<b>Quadro 2 – Parâmetros da estrutura <code>opts</code> no <i>Vector Fitting</i>.</b> .....	<b>34</b>
<b>Quadro 3 – Descrição das variáveis do circuito equivalente do transformador.</b> .....	<b>37</b>
<b>Quadro 4 – Parâmetros utilizados no algoritmo <i>Vector Fitting</i>.</b> .....	<b>51</b>

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AIC	<i>Akaike Information Criteria</i>
ARMAX	<i>AutoRegressive Moving Average with eXogenous input</i>
ARX	<i>AutoRegressive with eXogenous input</i>
DUT	<i>Device Under Test</i>
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EMTP	<i>Electromagnetic Transients Program</i>
FEM	Força Eletromotriz
LTI	<i>Linear Time-Invariant</i>
MATLAB®	<i>Matrix Laboratory</i>
MIMO	<i>Multiple Input Multiple Output</i>
MSE	<i>Mean Squared Error</i>
NARX	<i>Nonlinear AutoRegressive with eXogenous input</i>
NRMSE	<i>Normalized Root Mean Squared Error</i>
ONS	Operador Nacional do Sistema Elétrico
QP	<i>Quadratic Programming</i>
RLC	Resistor-Indutor-Capacitor
RMS	<i>Root Mean Square</i>
SIN	Sistema Interligado Nacional
SOLT	<i>Short, Open, Load, Thru</i>
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
UFPR	Universidade Federal do Paraná
USB	<i>Universal Serial Bus</i>
UTFPR	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
VF	<i>Vector Fitting</i>
VNA	<i>Vector Network Analyzer</i>

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>13</b>
1.1	Tema .....	13
1.1.1	Delimitação do Tema .....	14
1.2	<b>Apresentação do Problema de Pesquisa .....</b>	<b>14</b>
1.3	<b>Objetivos .....</b>	<b>15</b>
1.3.1	Objetivo Geral .....	15
1.3.2	Objetivos Específicos .....	15
1.4	<b>Justificativa.....</b>	<b>16</b>
1.5	<b>Enquadramentos Metodológicos e Metodologia da Pesquisa .....</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>IDENTIFICAÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA .....</b>	<b>18</b>
2.1	Introdução .....	18
2.2	Estrutura de Dados .....	19
2.3	<b>Representações Matemáticas de Sistemas Dinâmicos .....</b>	<b>23</b>
2.3.1	Espaço de Estados .....	25
2.4	<b>Formulação do Algoritmo do <i>Vector Fitting</i>.....</b>	<b>26</b>
2.4.1	Realocação de Polos .....	26
2.4.2	Estimação dos Resíduos .....	29
2.4.3	Considerações Adicionais .....	29
2.5	<b>Aplicação do <i>Vector Fitting</i> na Identificação de Sistemas .....</b>	<b>30</b>
2.5.1	Vetor de Conversão em Frequência .....	30
2.5.2	Matriz de Resposta em Frequência Bidimensional .....	31
2.5.3	Vetor de Polos Iniciais .....	31
2.5.4	Matriz Bidimensional de Pesos/Ponderações .....	32
2.5.5	Estruturas Opcionais .....	33
2.6	<b>Modelo Teórico do Transformador .....</b>	<b>34</b>
2.7	<b>Aquisição Experimental dos Dados .....</b>	<b>38</b>
2.8	<b>Síntese .....</b>	<b>40</b>
<b>3</b>	<b>ESTUDOS DE CASO E ANÁLISES .....</b>	<b>42</b>
3.1	<b>Critérios de Validação do Modelo Proposto.....</b>	<b>42</b>
3.1.1	Passividade do Modelo .....	42
3.1.2	Transferência de Tensão .....	44
3.1.3	Aderência ao Modelo Teórico .....	46
3.2	<b>Estudos de Caso .....</b>	<b>48</b>
3.2.1	Estudo de Caso 1: Dados Sintéticos .....	48
3.2.2	Estudo de Caso 2: Dados Reais Provenientes de Terceiros .....	53
3.2.3	Estudo de Caso 3: Dados Experimentais .....	63
3.3	<b>Síntese .....</b>	<b>72</b>
<b>4</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>73</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>74</b>

## 1 INTRODUÇÃO

### 1.1 Tema

Desde os primeiros estudos feitos na área de Engenharia Elétrica, quando os circuitos elétricos clássicos eram compostos inteiramente por redes formadas por resistores, indutores e capacitores (RLC), os conceitos de sistemas mostraram-se indispensáveis para a análise, classificação e modelagem desses circuitos.

Com o aumento da complexidade dos circuitos elétricos e eletrônicos modernos, passou-se a dar ênfase a uma visão mais ampla do estudo de sistemas em si, buscando generalizar os conhecimentos obtidos na área de circuitos para qualquer tipo de sistema, independentemente de sua natureza. Essa abordagem tornou a concepção de sistemas flexível, o que, apesar de dificultar seu entendimento, garante sua vasta aplicabilidade em diversas áreas da engenharia (Zadeh, 1962). Há arranjos físicos em que as leis determinísticas não conseguem por si só descrever o real comportamento das variáveis.

Nesse contexto, o estudo de sistemas revela-se como uma ferramenta importante para a modelagem de transformadores de potência. A aplicação dos conceitos de identificação de sistemas viabiliza o desenvolvimento de controladores mais eficientes, simulações mais precisas e otimiza a operação do Sistema Interligado Nacional (SIN), cuja capacidade de transformação na rede básica — composta por transformadores com tensão primária igual ou superior a 230 kV — ultrapassa 480.000 MVA (ONS, 2025). Além disso, possibilita a criação de gêmeos digitais e reforça a segurança nos processos de geração, transmissão, distribuição e proteção da energia elétrica. No entanto, a obtenção de um modelo demanda informações altamente detalhadas sobre a geometria do equipamento, materiais construtivos e suas propriedades eletromagnéticas (Gustavsen, 2004). Sendo assim, a identificação de sistemas emerge como uma área de significativa relevância e como um dos principais problemas dentro da chamada Teoria de Sistemas (Zadeh, 1962).

A identificação de sistemas é uma ferramenta que permite modelar sistemas dinâmicos a partir de dados experimentais de entradas e saídas, contribuindo para o estudo e previsão do comportamento de um sistema em diversas condições através de simulações computacionais. Dessa forma, tal área pode ser considerada uma interface entre aplicações no mundo real e o mundo matemático da teoria de controle e modelos abstratos (Ljung, 2010).

Neste cenário, o emprego de uma abordagem baseada na identificação de funções de transferência no domínio da frequência, para modelagem de sistemas complexos em frequências elevadas, reduz os efeitos do ruído nas medições e exige uma quantidade menor de dados armazenados (Pintelon *et al.*, 1994), tornando-a aplicável, por exemplo, na modelagem de transformadores de potência.

Existem diversos algoritmos de estimação de modelos no domínio da frequência, sendo que a maioria deles consiste na minimização de um problema de mínimos quadrados por meios iterativos (Pintelon *et al.*, 1994). Dentre eles destaca-se o algoritmo *Vector Fitting* (SINTEF,

2025), reconhecido por sua capacidade de convergência em funções de ordens elevadas e por sua eficácia no ajuste de respostas de transformadores (Gustavsen; Semlyen, 1999).

### 1.1.1 Delimitação do Tema

Neste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), objetiva-se estudar a identificação de sistemas no domínio da frequência aplicada a transformadores de potência, empregando dados obtidos por medições experimentais. Para tal, será utilizado o algoritmo *Vector Fitting*, apresentado no trabalho de Gustavsen e Semlyen (1999). O algoritmo será aplicado no *software MATLAB®*, e toda a análise será efetuada utilizando os seus recursos e suas bibliotecas.

Considerando que modelos de transformadores de potência adequados para estudos detalhados em médias e altas frequências não são fornecidos como informação padrão pelos fabricantes de transformadores (Holdyk *et al.*, 2014), adota-se, portanto, uma modelagem caixa-preta, na qual se consideram apenas as variáveis de entrada e de saída do sistema no domínio da frequência, obtendo-se um equivalente linear entre terminais do transformador (Holdyk *et al.*, 2014).

## 1.2 Apresentação do Problema de Pesquisa

A identificação de sistemas tem origem no problema de estimativa de modelos para sistemas dinâmicos, especialmente na área de controle, contando com duas principais abordagens para o desenvolvimento de sua teoria e metodologia: a abordagem de realização, que parte da teoria sobre como executar modelos em espaço de estados lineares a partir de respostas ao impulso, e a abordagem de erro de previsão, voltada para a estatística de séries temporais e a econometria (Ljung, 2010).

Dessa forma, desde sua origem, o problema de identificação de sistemas apresenta raízes matemáticas e estatísticas com ampla aplicabilidade em diversas áreas de estudo. Como mencionado, este trabalho aplica essa temática a transformadores de potência que, por padrão, não possuem informações detalhadas sobre sua geometria e propriedades eletromagnéticas. Tal limitação inviabiliza o uso de técnicas clássicas e exige a adoção de técnicas de modelagem que considerem apenas os dados de entrada e saída — do tipo caixa-preta — sem considerar a física do sistema.

Diferentemente da modelagem caixa-branca, baseada em descrições matemáticas ou físicas detalhadas do sistema, a modelagem caixa-preta é construída a partir de observações experimentais. Para isso, neste trabalho será utilizado o algoritmo *Vector Fitting*, uma ferramenta eficiente para a aproximação de dados por meio de funções racionais. Essa técnica é reconhecida por sua eficácia elevada, principalmente em aplicações que envolvem altas frequências, como no caso de transformadores de potência. Neste algoritmo, é possível realizar a escolha inicial de polos, o que permite a formulação do problema de mínimos quadrados e o subse-

quente ajuste dos dados; alternativamente, o usuário pode definir a ordem do sistema e os polos são estimados em número definido por essa ordem.

No setor de distribuição de energia, a obtenção de modelos precisos para transformadores de potência é essencial para a operação e o planejamento ótimo do SIN. Não são raros os eventos em que transformadores de potência apresentam problemas, falhas no funcionamento ou até mesmo explosões. Muitas dessas ocorrências estão associadas a modelagens insuficientes, incapazes de prever estados adversos causados por variações de tensão decorrentes de fatores internos da rede ou externos, como extremos de temperatura ou descargas elétricas (Schijndel, 2010).

### **1.3 Objetivos**

#### **1.3.1 Objetivo Geral**

Modelar transformadores de potência via abordagem caixa-preta de identificação de sistemas no domínio da frequência a partir de dados experimentais.

#### **1.3.2 Objetivos Específicos**

- Revisar a bibliografia sobre modelagem de equipamentos elétricos no domínio da frequência;
- Estudar o algoritmo do *Vector Fitting*;
- Analisar o modelo teórico clássico do transformador, incluindo seu comportamento no domínio da frequência;
- Descrever o processo de aquisição de dados de resposta em frequência em transformadores de potência;
- Estabelecer critérios de validação para dados experimentais e modelos;
- Realizar um experimento de aquisição de dados de resposta em frequência de um transformador de potência real utilizando um *Vector Network Analyzer* (VNA);
- Estimar um modelo para os dados aquisitados adotando critérios de ajuste e precisão;
- Aplicar critérios de validação aos dados experimentais e modelos obtidos.
- Discutir criticamente os resultados alcançados.

## 1.4 Justificativa

Por mais que a área de identificação de sistemas tenha se desenvolvido significativamente nas últimas décadas, o seu emprego ainda permanece relativamente pouco difundido (Ljung, 2010). Não obstante, sua utilização apresenta diversas vantagens tanto na indústria, quanto na infraestrutura energética. Transformadores de potência possuem modelos matemáticos clássicos na literatura, mas esses modelos não são adequados para capturar comportamentos transitórios em alta frequência, o que é essencial para a análise de transferência de tensão em oscilações rápidas de um sistema elétrico (Jurisic *et al.*, 2016).

Entre os diversos algoritmos de identificação de sistemas existentes, o *Vector Fitting* foi escolhido por demonstrar-se particularmente eficaz na modelagem de transformadores de potência a partir de respostas em frequência. O algoritmo apresenta ajustes bastante precisos e alta robustez, especialmente em sistemas de ordens elevadas (Gustavsen; Semlyen, 1999). Outrossim, o algoritmo, implementado em MATLAB®, pode ser facilmente executado em um computador pessoal, tornando sua aplicação acessível e prática.

Métodos de identificação como o ARX (*AutoRegressive with eXogenous input*), NARX (*Nonlinear AutoRegressive with eXogenous input*) e o ARMAX (*AutoRegressive Moving Average with eXogenous input*), não garantem a estabilidade do modelo, pois ajustam parâmetros com base em dados temporais sem impor restrições à localização dos polos, resultando possivelmente em modelos instáveis mesmo quando o sistema real é estável. Já o *Vector Fitting* incorpora um mecanismo explícito de *stability enforcement*, que garante que todos os polos do modelo identificado estejam localizados no semiplano esquerdo do plano *s*, assegurando a estabilidade do sistema.

O *Vector Fitting* retorna diretamente uma representação matricial em espaço de estados, bem como os polos e resíduos que caracterizam a expansão em frações parciais da função de transferência ajustada. Essa característica facilita sua aplicação em controle e simulação, sendo especialmente relevante neste trabalho. Um diferencial pertinente deste algoritmo é que a realização em espaço de estados obtida é de ordem mínima, ou seja, não possui estados redundantes para a caracterização dinâmica do sistema, contribuindo para a redução da complexidade do modelo gerado. Além disso, o *Vector Fitting* fornece um recurso complementar: geração automática de uma *netlist*<sup>1</sup> equivalente, composta por elementos RLC, compatível com simuladores de circuitos elétricos. Esta é uma serventia com vasta gama de aplicações, especialmente na modelagem de sistemas elétricos de potência, embora não seja explorada neste estudo.

A modelagem de transformadores de potência com o *Vector Fitting* permite a obtenção de um modelo do tipo caixa-preta que representa, com boa acurácia, o comportamento do sistema em frequências elevadas. Isso possibilita a realização de simulações e estudos relacionados à estabilidade do sistema, falhas e transitórios eletromagnéticos.

---

<sup>1</sup> Descrição estrutural de um sistema por meio da listagem de componentes e suas conexões em um circuito elétrico, utilizado por programas de simulação para representar e resolver tais circuitos.

Uma das principais vantagens de modelos caixa-preta é que eles requerem apenas dados de entrada e saída do sistema, dispensando o conhecimento detalhado sobre a geometria e as propriedades dos materiais do transformador, essenciais em uma abordagem de modelagem clássica. Outro benefício está na aquisição dos dados de resposta em frequência, realizada por VNA, equipamento empregado na área de sistemas elétricos de potência por fabricantes de transformadores (Jurisic *et al.*, 2016).

O estudo e a implementação apresentados neste trabalho são de grande relevância para a expansão e aprimoramento das técnicas de identificação de sistemas, contribuindo também, de maneira específica, para a modelagem de transformadores de potência em médias e altas frequências, promovendo maior segurança e disponibilidade do sistema elétrico como um todo.

### **1.5 Enquadramentos Metodológicos e Metodologia da Pesquisa**

A execução deste trabalho será fundamentada em artigos, teses e livros relacionados ao tema. O algoritmo escolhido para a identificação do sistema no domínio da frequência é o *Vector Fitting*, que se encontra disponível gratuitamente (SINTEF, 2025) e é implementado no software MATLAB®. Esse algoritmo possibilita o ajuste de funções racionais de elevada ordem às respostas em frequência do sistema, oferecendo elevada precisão e eficiência, além de ser de simples aplicação.

A opção pela modelagem no domínio da frequência deve-se, especialmente, à sua capacidade de reduzir os efeitos do ruído e à menor quantidade de dados exigida em comparação com a modelagem no domínio do tempo.

Por meio de experimentos empíricos realizados em ambiente controlado, serão obtidos dados de entrada e saída dos transformadores de potência. Com base exclusivamente nestes dados, o sistema será identificado e validado computacionalmente utilizando o software MATLAB®.

## 2 IDENTIFICAÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

### 2.1 Introdução

A identificação de sistemas pode ser abordada sob três perspectivas principais: caixa-branca, caixa-cinza e caixa-preta, classificações que variam de acordo com o grau de conhecimento prévio sobre o sistema modelado.

A modelagem caixa-branca tem sua base em um conhecimento físico completo da estrutura interna do sistema. A partir dela, o modelo é construído com base em leis fundamentais, como as equações de Maxwell ou de circuitos elétricos, exigindo informações detalhadas sobre a geometria, os materiais e as propriedades eletromagnéticas dos componentes. Apesar de ser capaz de oferecer alta precisão e interpretabilidade, essa abordagem é frequentemente inviável para sistemas complexos ou de difícil acesso, como transformadores de potência em operação.

A modelagem caixa-cinza representa um meio-termo entre as modelagens caixa-branca e caixa-preta. Nela, o modelo incorpora parte do conhecimento físico do sistema — como sua estrutura geral ou equações base — e ajusta parâmetros com base em dados experimentais. Isso possibilita a obtenção de representações com boa fidelidade e coerência física, mesmo quando não se dispõe de todas as informações internas.

Já a modelagem caixa-preta adota a posição oposta à modelagem caixa-branca: ignora a estrutura interna do sistema e utiliza exclusivamente dados de entrada e saída para estimar seu comportamento. Técnicas como redes neurais, ARX, NARX e ARMAX enquadram-se nessa categoria. A principal vantagem da modelagem caixa-preta está na sua facilidade de aplicação e flexibilidade, inclusive em situações em que se desconhece fisicamente o sistema. No entanto, os modelos resultantes são pouco interpretáveis e nem sempre garantem propriedades desejáveis, como estabilidade. Neste contexto, o *Vector Fitting* pode ser caracterizado como uma ferramenta de modelagem caixa-preta, que permite impor restrições relacionadas a propriedades físicas do sistema — como estabilidade e passividade — mesmo sem representar explicitamente sua estrutura interna.

O *Vector Fitting* é um algoritmo numérico iterativo utilizado para aproximação de funções racionais a partir de um conjunto de dados conhecidos no domínio da frequência (SINTEF, 2025). O algoritmo foi desenvolvido por Gustavsen e Semlyen (1999) e tem sido empregado em diversas áreas da engenharia, com aplicações em modelagem de sistemas de potência, sistemas de micro-ondas e eletrônica de alta frequência.

Através do *Vector Fitting*, é possível a obtenção de uma representação matemática de um modelo que se aproxima da dinâmica do sistema real, resolvendo um problema linearizado de mínimos quadrados. Para tanto, são empregados dados de respostas em frequência características obtidas diretamente dos terminais do sistema, sendo esse tipo de modelagem conhecida como caixa-preta. Os dados são coletados experimentalmente por meio de um VNA, do inglês, *Vector Network Analyzer*, e armazenados em um conjunto de pontos  $\mathcal{D}$  com a estrutura descrita na Equação (1). Esses dados são passados como entradas para o algoritmo *Vector Fitting*.

$$\mathcal{D} = \{(s_i, \mathbf{H}(s_i)) \mid s_i \in \mathbb{C}, \mathbf{H}(s_i) \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \dots, N\}, \quad (1)$$

em que:

- $s_i$  representa os pontos de frequência avaliados, no eixo imaginário, ou seja,  $s_i = j\omega_i$ , com  $\omega_i \in \mathbb{R}^+$ ;
- $\mathbf{H}(s_i)$  é a resposta do sistema no ponto  $s_i$ , ou seja, o valor do ganho complexo para determinada frequência;
- $N$  é o número total de pontos de dados coletados.

Para implementar o algoritmo proposto, faz-se necessário estruturar os dados de resposta em frequência de tal forma que o modelo possa ser estimado adequadamente. Assim, o *Vector Fitting* é capaz de identificar o sistema dinâmico a partir desses dados. Em aplicações envolvendo sistemas elétricos, é usual que estes dados em frequência representem impedâncias, admitâncias ou parâmetros de espalhamento. Neste capítulo serão abordadas as três principais matrizes características e as limitações metrológicas e práticas associadas a cada uma delas.

Além disso, também serão discutidas, brevemente, as diferentes formas matemáticas de representar sistemas dinâmicos, tanto no domínio do tempo, como a representação em espaço de estados, quanto no domínio da frequência, como a função de transferência. Todas as representações são equivalentes entre si, no sentido de modelarem o mesmo sistema dinâmico, porém a escolha de cada representação depende do tipo de análise a ser realizada e da metodologia de identificação implementada.

Em seguida, discute-se o modelo teórico do transformador, destacando como seus elementos físicos inter-relacionam-se na prática, bem como os fenômenos associados e as motivações para a aplicação do algoritmo *Vector Fitting* em transformadores de potência. Além disso, descreve-se o procedimento de obtenção dos dados no domínio da frequência por meio de um VNA, abordando suas funcionalidades, ferramentas disponíveis e a forma como será empregado neste trabalho.

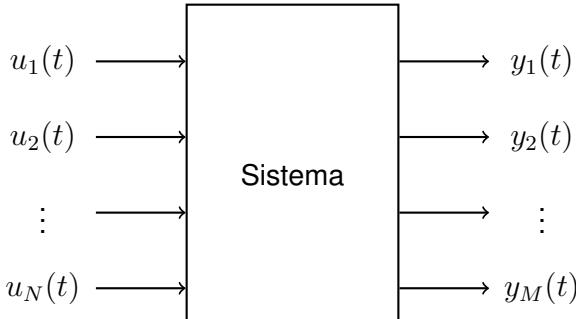
Por fim, analisa-se a formulação matemática do algoritmo *Vector Fitting*, assim como sua aplicação prática, ambos com o objetivo de proporcionar um entendimento mais aprofundado do processo de identificação implementado e das características associadas a este algoritmo. Ao compreender o procedimento algorítmico, é possível utilizá-lo com maior rigor e precisão no contexto de identificação proposto.

## 2.2 Estrutura de Dados

Para a identificação de um modelo do tipo caixa-preta de um componente ou equipamento inserido em um sistema elétrico, como um transformador de potência, é necessário levar

em consideração a forma com que os dados experimentais são aquisitados e estruturados, para que a modelagem traduza adequadamente a dinâmica do sistema. Esse tipo de modelagem é feita via terminais do sistema, conforme representado na Figura 1, e a caracterização do sistema pode ser realizada através das relações entre as tensões e correntes medidas nestes terminais. Nesse contexto, podem ser empregadas as três principais matrizes características do sistema: impedância ( $Z$ ), admitância ( $Y$ ) e espalhamento ( $S$ ).

**Figura 1 – Modelo caixa-preta com  $N$  entradas ( $u_1(t), \dots, u_N(t)$ ) e  $M$  saídas ( $y_1(t), \dots, y_M(t)$ ).**



Fonte: Autoria própria.

A matriz de impedâncias é construída a partir da relação direta entre a tensão e a corrente, sendo que, neste cenário, a corrente é injetada nas portas de entrada e a tensão é medida nas portas de saída.

$$\mathbf{v} = \mathbf{Z}\mathbf{i} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \cdots & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}, \quad (2)$$

Conforme a Equação (2),  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$  é um vetor que representa a tensão obtida experimentalmente em um terminal de saída, enquanto  $\mathbf{i} \in \mathbb{C}^n$  é um vetor que representa a corrente aplicada a partir de uma fonte de corrente em um terminal de entrada, e  $\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  corresponde à matriz de impedâncias.

Em sua forma matricial expandida, um elemento  $Z_{ij}$  corresponde à impedância entre os terminais  $i$ , onde a tensão é medida, e  $j$ , onde a corrente é injetada. Para determinar experimentalmente um único elemento dessa matriz, é necessário que todas as outras portas estejam em aberto, de forma que a Equação (2) reduza-se a Equação (3). Esta última equação demonstra como calcular um elemento  $Z_{ij}$  da matriz de impedâncias.

$$Z_{ij} = \frac{V_i}{I_j} \quad \text{com } I_n = 0, \forall n \neq j. \quad (3)$$

Para a obtenção da matriz de admitâncias, é feita a análise reversa em relação à matriz de impedâncias. Insere-se uma fonte de tensão em um terminal de entrada e é feita a leitura de corrente em um terminal de saída. A partir disso, a matriz de admitâncias  $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  será a

relação entre as correntes e as tensões, conforme descrito na Equação (4). Analogamente, um único elemento  $Y_{ij}$  corresponde à admitância entre os terminais  $i$ , onde a corrente é medida, e  $j$ , onde a tensão é injetada. Cada elemento pode ser obtido experimentalmente, com a condição de que todas as outras portas estejam em curto e aterradas, de acordo com a Equação (5). Essa equação demonstra como calcular um elemento  $Y_{ij}$  da matriz de admitâncias.

$$\mathbf{i} = \mathbf{Yv} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \cdots & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$Y_{ij} = \frac{I_i}{V_j} \quad \text{com } V_n = 0, \forall n \neq j. \quad (5)$$

Por se tratar de variáveis duais, a matriz de impedância é prontamente obtível a partir da matriz de admitância, e vice-versa, conforme a Equação (6). Essa relação é válida desde que sejam consideradas matrizes invertíveis, o que é comum em sistemas lineares e passivos.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1}. \quad (6)$$

Por fim, a matriz de espalhamento  $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , diferentemente das matrizes de impedâncias e admitâncias, refere-se ao modo como ondas<sup>1</sup> comportam-se quando encontram um ponto de descontinuidade ou um componente de um sistema. Ou seja, caracteriza a relação entre ondas incidentes e refletidas quando terminadas por impedâncias de referência.

A matriz de espalhamento é especialmente útil quando se lida com sistemas expostos a altas frequências, visto a sua maior conveniência para medições experimentais dado que, em altas frequências, a medição direta de tensão e corrente torna-se imprecisa, devido a reflexões, perdas e efeitos parasitas indutivos e capacitivos nos equipamentos utilizados. Além disso, para componentes passivos ou ativos em alta frequência, as matrizes  $\mathbf{Z}$  e  $\mathbf{Y}$  podem ter entradas infinitas, instáveis ou não físicas; já a matriz  $\mathbf{S}$  sempre permanece estável e mensurável, mesmo com componentes ativos.

Nas portas de entrada e saída, as relações dispostas pelas Equações (7) — (9) evidenciam como se trabalha com a matriz de espalhamento;  $\mathbf{v}_i$  corresponde à tensão incidente,  $\mathbf{v}_r$  à tensão refletida,  $\mathbf{i}_i$  à corrente incidente,  $\mathbf{i}_r$  à corrente refletida e  $\mathbf{Z}_0^{-1}$  é o inverso da matriz de impedância diagonal obtida para a configuração, em que a  $j$ -ésima entrada está terminada com a impedância de referência  $Z_{0j}$ .

---

<sup>1</sup> Sinais elétricos ou eletromagnéticos, para este trabalho.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_r, \quad (7)$$

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_i - \mathbf{i}_r, \quad (8)$$

$$\mathbf{i} = \mathbf{Z}_0^{-1}(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_r). \quad (9)$$

A partir da Equação (4), pode-se substituir os valores de  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{i}$  obtidos nas Equações (7) e (9), resultando na Equação (10). A matriz  $\tilde{\mathbf{S}}$  já é considerada uma matriz de espalhamento.

$$\mathbf{v}_r = (\mathbf{I} + \mathbf{Z}_0 \mathbf{Y})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Z}_0 \mathbf{Y})\mathbf{v}_i, \quad (10)$$

$$\tilde{\mathbf{S}} = (\mathbf{I} + \mathbf{Z}_0 \mathbf{Y})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Z}_0 \mathbf{Y}), \quad (11)$$

$$\mathbf{v}_r = \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{v}_i. \quad (12)$$

Nota-se pela Equação (11) que os parâmetros de espalhamento são dependentes das impedâncias de referência escolhidas. A tensão refletida,  $\mathbf{v}_r$ , relaciona-se com a tensão incidente,  $\mathbf{v}_i$ , por meio da matriz de espalhamento,  $\tilde{\mathbf{S}}$ , conforme a Equação (12). Para facilitar a aplicação, comumente normaliza-se as ondas de tensão, dividindo-as pela raiz quadrada<sup>2</sup> da impedância de referência. Assim, obtém-se a relação disposta na Equação (13).

$$\mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{a}, \quad (13)$$

As Equações (14) — (16) apresentam os termos individuais da Equação (13).

$$\mathbf{a} = \left( \sqrt{\mathbf{Z}_0} \right)^{-1} \mathbf{v}_i, \quad (14)$$

$$\mathbf{b} = \left( \sqrt{\mathbf{Z}_0} \right)^{-1} \mathbf{v}_r, \quad (15)$$

$$\mathbf{S} = \left( \mathbf{I} + \sqrt{\mathbf{Z}_0} \mathbf{Y} \sqrt{\mathbf{Z}_0} \right)^{-1} \left( \mathbf{I} - \sqrt{\mathbf{Z}_0} \mathbf{Y} \sqrt{\mathbf{Z}_0} \right). \quad (16)$$

É importante destacar que a matriz  $\mathbf{S}$  é idêntica a matriz  $\tilde{\mathbf{S}}$  quando todas as portas são terminadas pela mesma impedância de referência. Os elementos da diagonal principal de  $\mathbf{S}$  — isto é,  $S_{ii}$  — definem a onda refletida na porta  $i$  devido a uma onda incidente na mesma porta, enquanto um elemento fora da diagonal de  $\mathbf{S}$  — isto é,  $S_{ij} \forall i \neq j$  — define a onda refletida na porta  $i$  devido a uma onda incidente na porta  $j$ .

---

<sup>2</sup> Raiz quadrada matricial, no caso de sistemas multiportas.

Pode-se transformar os parâmetros de espalhamento em parâmetros de admitância com base na Equação (17).

$$\mathbf{Y} = \left( \sqrt{\mathbf{Z}_0} \right)^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{S})(\mathbf{I} + \mathbf{S})^{-1} \left( \sqrt{\mathbf{Z}_0} \right)^{-1}. \quad (17)$$

Ao realizar a análise das matrizes de impedância, admitância e espalhamento, torna-se claro que as três relacionam entradas e saídas. Em teoria de controle, a relação entre uma entrada e uma saída de um sistema Linear e Invariante no Tempo (LTI) é denominada como função de transferência, ou seja, as matrizes de impedância, admitância e espalhamento são casos particulares de uma função de transferência. Sabendo disso, pode-se utilizar o algoritmo *Vector Fitting* para formular um modelo racional das matrizes  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{S}$  e facilitar a análise de circuitos com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO).

### 2.3 Representações Matemáticas de Sistemas Dinâmicos

Um sistema dinâmico pode ser representado matematicamente de diferentes maneiras, cada uma oferecendo suas vantagens e desvantagens, a depender das características de aplicação. De qualquer forma, todas as representações apresentam equivalências entre si, que podem ser exploradas para se obter diferentes informações acerca do mesmo sistema. Como todas as representações são advindas do mesmo sistema dinâmico, é possível migrar de uma representação para outra com artifícios matemáticos específicos. Para o desenvolvimento do estudo abordado neste trabalho, torna-se importante o detalhamento conceitual de algumas dessas representações, que serão apresentadas nesta seção.

Qualquer sistema dinâmico em tempo contínuo é regido por uma equação diferencial. Nos casos em que o comportamento do sistema varia exclusivamente em função do tempo, tem-se a particularização da Equação Diferencial Ordinária (EDO), cuja forma genérica invariante no tempo é apresentada na Equação (18). Nesta equação, são relacionadas as variáveis de entrada e saída por meio de combinações lineares das funções de seus sinais e suas derivadas de ordem superior, de acordo com a natureza do sistema.

$$\alpha_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \cdots + \alpha_1 \frac{dy(t)}{dt} + \alpha_0 y(t) = \beta_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \cdots + \beta_1 \frac{du(t)}{dt} + \beta_0 u(t). \quad (18)$$

Na Equação (18),  $u(t)$  e  $y(t)$  representam, respectivamente, as variáveis de entrada e saída do sistema em função do tempo. Já os coeficientes  $\alpha_i$  e  $\beta_j$  são constantes reais que estabelecem a dinâmica do sistema, sendo relacionados a propriedades físicas como amortecimento, inércia ou ganho. A ordem da equação é determinada pelo maior grau de derivação presente, refletindo a complexidade do comportamento do sistema. Por esse motivo, ela geral-

mente não é utilizada em simulações de sistemas complexos<sup>3</sup>, pois sua complexidade escalona rapidamente à medida que a ordem do sistema cresce.

Além disso, outro obstáculo na modelagem via EDO está na dificuldade em obter a equação que corretamente descreve o sistema. Essa equação tipicamente é derivada por meio de princípios fundamentais da física ou através da modelagem caixa-branca, que tende a ser trabalhosa e, em muitos casos, até inviável, para sistemas multivariáveis.

Tomando a transformada de Laplace da Equação (18), supondo condições iniciais nulas, obtém-se uma equação algébrica, em termos da variável complexa  $s$ . Essa variável é definida conforme a Equação (19), em que  $\sigma$  é a parte real, que define o comportamento exponencial de crescimento ou decaimento do sistema, enquanto  $\omega$  é a parte imaginária, que define seu comportamento oscilatório.

$$s = \sigma + j\omega. \quad (19)$$

Assim, é possível converter uma representação do domínio do tempo para o domínio da frequência, facilitando manipulações matemáticas. Nesse contexto, define-se a função de transferência como a razão entre o sinal de saída e de entrada, no domínio de Laplace, para um sistema sob condições iniciais nulas.

As funções de transferência podem ser escritas de diferentes formas, conforme a estrutura da sua expressão algébrica. Nas Equações (20) — (22) são apresentadas, respectivamente, as representações polinomial, em polo-resíduo e em polos e zeros.

$$f(s) = K \frac{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \alpha_{n-2} s^{n-2} + \cdots + \alpha_0}{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \beta_{m-2} s^{m-2} + \cdots + \beta_0}, \quad (20)$$

$$f(s) = \sum_{n=1}^N \frac{C_n}{s - a_n} + d + sh, \quad (21)$$

$$f(s) = K \prod_{m=1}^M (s - z_m) \Big/ \prod_{n=1}^N (s - a_n), \quad (22)$$

em que:

- $\alpha_n$  e  $\beta_n$ : coeficientes da EDO;
- $K$ : ganho do sistema;
- $C_n$ : resíduos do sistema;
- $a_n$ : polos do sistema;
- $z_m$ : zeros do sistema;

---

<sup>3</sup> Aqui, o termo "complexo" se refere à dificuldade e tecnicidade do sistema, e não ao conjunto dos números complexos.

- $d$ : termo de ganho direto (opcional);
- $h$ : termo de erro ou *offset* (opcional).

A forma polinomial, apresentada pela Equação (20), é a mais comum entre as representações de funções de transferência, sendo estruturada como a razão entre dois polinômios em  $s$ . Essa forma origina-se diretamente da definição de função de transferência, de tal forma que as raízes do polinômio do numerador correspondem aos zeros do sistema, enquanto as raízes do denominador correspondem aos polos. A quantidade de polos define a ordem do sistema.

A forma polo-resíduo, apresentada pela Equação (21), consiste na representação da função de transferência como uma soma de frações parciais, sendo que os polos do sistema e seus respectivos resíduos estão associados a cada termo do somatório<sup>4</sup>. Nessa representação, pode-se observar explicitamente os polos que compõem a dinâmica do sistema, assim como a contribuição individual de cada um deles, caracterizada pelos resíduos. Através dessa estrutura, é possível analisar qualitativamente características dinâmicas do comportamento de um sistema, como a presença de oscilações, grau de amortecimento e modos dominantes, sem a necessidade de realizar simulações ou cálculos.

Por fim, a representação em polos e zeros, apresentada pela Equação (22), é a forma fatorada da função de transferência polinomial. Nessa estrutura, são evidenciados o ganho, os polos e os zeros, permitindo uma visualização direta dos elementos que compõem as características dinâmicas, em frequência, do sistema.

### 2.3.1 Espaço de Estados

A representação em espaço de estados utiliza um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem para representar um sistema dinâmico. Essa representação faz uso de variáveis de estado internas do sistema, responsáveis por caracterizar a evolução dinâmica das principais grandezas envolvidas em função do tempo. O modelo geral da representação em espaço de estados é dado pelo sistema linear composto pelas Equações (23) e (24).

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t), \quad (23)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t), \quad (24)$$

em que:

- $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{C}^n$ : vetor de estados do sistema, com dimensão  $n$ ;
- $\dot{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{C}^n$ : derivada temporal do vetor de estados;

---

<sup>4</sup> Na Equação (21) são considerados polos distintos, porém a forma polo-resíduo também admite polos de multiplicidade não unitária.

- $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{C}^m$ : vetor de entradas do sistema, com dimensão  $m$ ;
- $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{C}^p$ : vetor de saídas do sistema, com dimensão  $p$ ;
- $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ : matriz de dinâmica dos estados;
- $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ : matriz de entrada;
- $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{p \times n}$ : matriz de saída;
- $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{p \times m}$ : matriz de alimentação direta.

A representação de um sistema em espaço de estados oferece a vantagem de ser uma forma compacta, mesmo para sistemas de ordem elevada, subsidiada pelo uso da álgebra linear e suas ferramentas de manipulação matricial. Além disso, o espaço de estados permite a modelagem conveniente de sistemas MIMO, bem como sistemas não lineares e variantes no tempo.

Devido a essas propriedades, a representação em espaço de estados é amplamente utilizada em projetos e análises de controladores avançados e também na identificação de sistemas por meio do *Vector Fitting*.

## 2.4 Formulação do Algoritmo do *Vector Fitting*

Ao utilizar o *Vector Fitting*, tem-se como objetivo encontrar os parâmetros de uma representação racional aproximada de uma função ou matriz de transferência, a partir de um conjunto de pontos de uma resposta em frequência do sistema a ser identificado. A matriz de transferência é uma generalização da função de transferência para sistemas MIMO, em que cada elemento relaciona uma entrada específica a uma saída específica no domínio de Laplace. Esses dados são, em geral, obtidos por meio de medições experimentais. O algoritmo realiza, portanto, uma aproximação racional no domínio da frequência para o conjunto de dados de entrada. Ao final do processo iterativo, o resultado é convertido, por relações de equivalência, em coeficientes de uma realização no espaço de estados correspondente. Em posse dessa aproximação, é possível empregá-la na modelagem do sistema dinâmico em estudo, que inclui comportamentos transitórios de alta frequência capturados pelas medições (Jurisic *et al.*, 2016).

### 2.4.1 Realocação de Polos

Em sua essência, o algoritmo *Vector Fitting* possui duas etapas: a realocação de polos e a estimativa dos resíduos. Na primeira etapa, existe um mecanismo iterativo de realocação de polos com base no ajuste de polos iniciais — escolhidos no início do processo — que geralmente converge para os polos originais do conjunto de dados, dada uma escolha de ordem suficientemente grande, de modo que o modelo resultante aproxime-se melhor do sistema que

gerou o conjunto de pontos da resposta em frequência medida. Matematicamente, o *Vector Fitting* baseia-se em um problema de mínimos quadrados, em que se deseja obter a melhor aproximação para um modelo linear. Esse modelo é obtido a partir da simplificação de um problema não linear em duas etapas, ambas lineares, cujas soluções convergem para a aproximação desejada (Gustavsen; Semlyen, 1999). Sendo assim, a partir de um conjunto inicial de polos, o algoritmo os realoca iterativamente, de tal forma que a função resultante aproxime-se progressivamente dos dados experimentais. Repetindo esse processo a cada iteração, é garantido que os parâmetros do modelo converjam gradualmente para valores que melhor representam o comportamento dinâmico do sistema.

Com base nessa ideia, parte-se da suposição que a resposta em frequência medida foi produzida por um sistema, cuja representação aproximada é dada por uma função racional na forma polo-resíduo, conforme a Equação (21). Sendo assim, a estimativa de seus parâmetros é um problema não linear, pois os polos aparecem no denominador da função de transferência, tornando não linear a dependência do modelo com relação a esses parâmetros. Já os resíduos, eles podem ser estimados por métodos lineares, como mínimos quadrados; a estimativa dos polos exige abordagens iterativas e não lineares, como o algoritmo *Vector Fitting*.

Para contornar a não linearidade desse problema, são introduzidas duas funções racionais com polos conhecidos — os mesmos polos iniciais supracitados —, conforme descrito nas Equações (25) e (26), em que  $\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_N\}$  são tais polos. Essas funções são definidas de tal modo que, a multiplicação de  $\sigma(s)$  pela função  $f(s)$  a ser estimada, resulta em uma aproximação para  $\sigma f(s)$ , conforme a Equação (27). Além disso, supõe-se que os zeros de  $\sigma(s)$  correspondem aos polos de  $f(s)$ , tornando a Equação (27) linear com relação aos parâmetros a serem estimados.

$$\sigma f(s) \approx \sum_{n=1}^N \frac{C_n}{s - \bar{a}_n} + d + sh, \quad (25)$$

$$\sigma(s) \approx \sum_{n=1}^N \frac{\tilde{C}_n}{s - \bar{a}_n} + 1, \quad (26)$$

$$\sigma f(s) - \sigma(s)f(s) \approx 0. \quad (27)$$

Portanto, é possível reduzir o problema a uma expressão do tipo  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , em que se aplica o algoritmo de mínimos quadrados para obter a solução do problema. A partir da Equação (27), isolando  $f(s)$ , que contém os valores das medições, obtém-se a Equação (28).

$$\left( \sum_{n=1}^N \frac{C_n}{s - \bar{a}_n} + d + sh \right) - \left( \sum_{n=1}^N \frac{\tilde{C}_n f(s)}{s - \bar{a}_n} \right) \approx f(s). \quad (28)$$

Ao transformar a Equação (28) para o formato matricial, obtém-se uma estrutura em que cada linha da matriz corresponde à aplicação da equação, em um dado ponto de frequência, conforme apresentada na Equação (29). Os elementos da matriz são formados por funções dos

parâmetros conhecidos, enquanto o vetor de incógnitas constitui-se pelos coeficientes que se deseja estimar. Com isso, o problema de ajuste de uma função racional é convertido em um problema de mínimos quadrados do tipo linear, que pode ser aplicado de modo iterativo para aproximações sucessivas.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{s_1 - \bar{a}_1} & \dots & \frac{1}{s_1 - \bar{a}_N} & 1 & s_1 & \frac{-f(s_1)}{s_1 - \bar{a}_1} & \dots & \frac{-f(s_1)}{s_1 - \bar{a}_N} \\ \frac{1}{s_2 - \bar{a}_1} & \dots & \frac{1}{s_2 - \bar{a}_N} & 1 & s_2 & \frac{-f(s_2)}{s_2 - \bar{a}_1} & \dots & \frac{-f(s_2)}{s_2 - \bar{a}_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{s_k - \bar{a}_1} & \dots & \frac{1}{s_k - \bar{a}_N} & 1 & s_k & \frac{-f(s_k)}{s_k - \bar{a}_1} & \dots & \frac{-f(s_k)}{s_k - \bar{a}_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \\ d \\ h \\ \tilde{c}_1 \\ \vdots \\ \tilde{c}_N \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} f(s_1) \\ \vdots \\ f(s_k) \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Portanto, após realizar a primeira aproximação via mínimos quadrados, é necessário atualizar os polos utilizados no algoritmo, de maneira que se possa realizar iterações sucessivas, ajustando os polos do algoritmo com a resposta em frequência medida. Para isso, isola-se  $f(s)$  na Equação (27), resultando na expressão mostrada na Equação (30). Nota-se que os polos de  $\sigma f(s)$  e  $\sigma(s)$  cancelam-se e, portanto, os zeros de  $\sigma(s)$  podem ser utilizados para atualizar os polos da Equação (29). O objetivo, portanto, é obter estes zeros, o que pode ser feito por meio das Equações (31) e (32), em que  $\mathbf{A}$  é a matriz com os polos,  $\mathbf{b}$  é um vetor coluna com valores fixos<sup>5</sup> e  $\tilde{\mathbf{C}}^\top$  é um vetor linha que contém os resíduos associados à função  $\sigma(s)$ . Observa-se que os zeros buscados são os autovalores da Equação (31).

$$f(s) \approx \frac{\sigma f(s)}{\sigma(s)} = \frac{h \left( \prod_{n=1}^{N+1} (s - Z_n) \right)}{\left( \prod_{n=1}^N (s - \bar{a}_n) \right)} = \left( h \frac{\prod_{n=1}^{N+1} (s - Z_n)}{\prod_{n=1}^N (s - \bar{Z}_n)} \right), \quad (30)$$

$$\mathbf{H} = (\mathbf{A} - \mathbf{b} \tilde{\mathbf{C}}^\top), \quad (31)$$

$$\{\tilde{Z}_n\} = \{\lambda | \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{H}) = 0\}. \quad (32)$$

<sup>5</sup> Esses valores são determinados a partir dos parâmetros especificados pelo usuário, conforme será apresentado na Seção 2.5.

Na Equação (30), a ordem do numerador de  $N + 1$  e o fator multiplicador  $h$  devem-se ao termo  $sh$  de  $\sigma f(s)$ , que é inexistente em  $\sigma(s)$ . Além disso, o fato de  $\sigma(s)$  ser definida com a mesma ordem no numerador e denominador indica que, no caso em que os polos iniciais coincidam com os polos da aproximação desejada, a função apresenta valor unitário. Isso implica que os polos iniciais da próxima iteração serão os mesmos da iteração atual, ou seja, o algoritmo terá收敛ido para uma aproximação estável de  $f(s)$  sem a estimativa dos resíduos. Após a segunda etapa do processo, que também envolve mínimos quadrados lineares, mas não é iterativa, são estimados os resíduos e obtida a aproximação estável e completa de  $f(s)$ .

#### 2.4.2 Estimação dos Resíduos

Para a finalização do processo de formulação do *Vector Fitting*, faz-se necessária a estimativa dos resíduos, ou seja, a obtenção dos coeficientes  $\{c_1, \dots, c_N\}$ , além das constantes  $d$  e  $h$ . A estimativa dos resíduos é realizada a partir da resolução de outro problema de mínimos quadrados, utilizando como base os polos fixados após a quantidade de iterações definida pelo usuário ser executada. Portanto, não ocorrem novas iterações nesta etapa e o problema de mínimos quadrados é resolvido apenas uma única vez, com os polos já definidos.

Utilizando como base a Equação (33), e considerando que os polos  $\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_N\}$  já foram previamente fixados, determina-se a solução pelo método dos mínimos quadrados, a partir da minimização do erro da aproximação definida na Equação (34).

A matriz  $\mathbf{A}$  corresponde à matriz composta pelas funções associadas aos polos e aos pontos de frequência  $s_k$ <sup>6</sup>, conforme evidenciado na Equação (33). O vetor  $\mathbf{x}$  contém as incógnitas  $[c_1, \dots, c_N, d, h]^\top$ , enquanto  $\mathbf{b}$  representa o vetor formado pelas amostras de  $f(s_k)$ .

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{s_1 - a_1} & \dots & \frac{1}{s_1 - a_N} & 1 & s_1 \\ \frac{1}{s_2 - a_1} & \dots & \frac{1}{s_2 - a_N} & 1 & s_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{s_k - a_1} & \dots & \frac{1}{s_k - a_N} & 1 & s_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \\ d \\ h \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} f(s_1) \\ f(s_2) \\ \vdots \\ f(s_k) \end{bmatrix}, \quad (33)$$

$$\min_{c_n, d, h} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2. \quad (34)$$

#### 2.4.3 Considerações Adicionais

O algoritmo *Vector Fitting* passou por diversas modificações ao longo do tempo. No trabalho de Deschrijve Michal Mrozowski e Zutter (2008) foram introduzidas adaptações importan-

---

<sup>6</sup> Na prática, os pontos  $s_k$  pertencem ao eixo imaginário, ou seja,  $s_k = j\omega_k$ , mas a notação utilizada é consistente com a formulação geral empregada ao longo desta seção.

tes para o caso MIMO, com destaque para a reestruturação da formulação de mínimos quadrados. Uma das alterações mais relevantes foi a aplicação da decomposição QR nas equações de mínimos quadrados associadas a cada elemento da matriz de dados. Essa abordagem permite reduzir significativamente a complexidade computacional, uma vez que evita o uso direto de grandes matrizes esparsas. Ao aplicar a fatoração QR individualmente a cada equação, obtém-se um conjunto de sistemas reduzidos, cujas incógnitas são apenas os coeficientes comuns dos polos. Esses sistemas são resolvidos de forma sequencial e, posteriormente, combinados para identificar um conjunto único de polos, compartilhado por toda a estrutura do sistema.

## 2.5 Aplicação do *Vector Fitting* na Identificação de Sistemas

Conforme mencionado na Seção 1.5, o *Vector Fitting* é implementado no *software* MATLAB®, uma plataforma de programação voltada para cálculo numérico e simulação. O MATLAB® utiliza uma linguagem de programação de alto nível e oferece um ambiente interativo, ferramentas de visualização e uma ampla gama de bibliotecas que facilitam o seu uso. Esse *software* é especialmente útil para modelagem e simulação envolvendo funções de transferência e representação em espaço de estados. Por esse motivo, o *Vector Fitting* foi desenvolvido nesse ambiente.

A implementação do *Vector Fitting* no MATLAB® é intuitiva e de fácil compreensão. Para viabilizar sua ampla aplicação prática, o algoritmo está disponível no domínio público, e pode ser acessado no site do SINTEF (2025). A biblioteca inclui uma rotina auxiliar denominada `ss2pr.m`, implementada para converter uma representação em espaço de estados para a forma polo-resíduo, além de uma rotina adicional denominada `tri2full.m`, que realiza a conversão de uma realização triangular superior para uma realização completa. Além disso, também é disponibilizado um manual de usuário, contendo informações importantes sobre a utilização do algoritmo e exemplos de aplicações.

A execução de uma iteração do *Vector Fitting* envolve a chamada de uma função específica, que recebe alguns parâmetros como entrada. Esses parâmetros serão discutidos nas próximas seções, nas quais se exemplificará a aplicação do *Vector Fitting* a partir de dados obtidos no domínio da frequência, foco deste estudo.

### 2.5.1 Vetor de Conversão em Frequência

Após a obtenção das amostras do sistema em análise, deve-se, inicialmente, reunir os pontos de frequência medidos em um vetor único, geralmente expresso em radianos por segundo (rad/s), definindo assim a faixa de frequência amostrada. Para fins de visualização e interpretação, é possível trabalhar com a frequência em Hertz (Hz). Entretanto, para a aplicação do algoritmo, é necessário converter os pontos de frequência para o domínio de Laplace, de modo que possam ser devidamente interpretados pelo algoritmo. O Algoritmo 1 apresenta um

exemplo de procedimento possível para a construção do vetor de pontos de frequência, em que freq armazena os pontos em Hz, w em rad/s e s representa os pontos no plano complexo.

**Algoritmo 1 – Definição do vetor de pontos de frequência.**

---

```
1: freq = Hjw.Frequency' / (2*pi);
2: w = freq*2*pi;
3: s = 1j*w;
```

---

**Fonte: Autoria própria.**

### 2.5.2 Matriz de Resposta em Frequência Bidimensional

Outro parâmetro utilizado na chamada da função do *Vector Fitting* é a matriz bidimensional de resposta em frequência, de dimensões  $n \times N_s$ , em que  $n$  representa o número de elementos a serem ajustados e  $N_s$  corresponde ao número de pontos de frequência amostrados. A resposta em frequência medida do sistema constitui os dados a serem ajustados pelo algoritmo. O Algoritmo 2 apresenta um exemplo de definição dessa matriz para o caso em que são ajustados nove elementos de uma matriz de resposta em frequência  $3 \times 3$ . Nesse tipo de ajuste, todos os elementos compartilham um único conjunto de polos comum, de modo que o número de polos iniciais deve ser definido levando em consideração essa característica.

**Algoritmo 2 – Definição da matriz de resposta em frequência para o ajuste de nove elementos.**

---

```
1: Gjw3x3 = Gjw3x3.ResponseData;
2: Gjw = [squeeze(Gjw3x3(1,1,:))';
3:         squeeze(Gjw3x3(1,2,:))';
4:         squeeze(Gjw3x3(1,3,:))';
5:         squeeze(Gjw3x3(2,1,:))';
6:         squeeze(Gjw3x3(2,2,:))';
7:         squeeze(Gjw3x3(2,3,:))';
8:         squeeze(Gjw3x3(3,1,:))';
9:         squeeze(Gjw3x3(3,2,:))';
10:        squeeze(Gjw3x3(3,3,:))';
```

---

**Fonte: Autoria própria.**

### 2.5.3 Vetor de Polos Iniciais

O *Vector Fitting* é um algoritmo de modelagem que necessita de polos iniciais. Portanto, inicialmente são especificados polos iniciais para o processo de iteração, os quais podem ser definidos manualmente pelo usuário, ou não. A escolha manual dos polos permite ao algoritmo convergir de maneira mais rápida e eficiente, especialmente em casos em que já existem conhecimentos prévios sobre o sistema ou observações de características da resposta em frequência, sendo essas abordagens heurísticas. Além disso, a quantidade de polos especificados pelo usuário definirá diretamente a ordem da aproximação resultante.

Alternativamente, o usuário pode especificar apenas a ordem da aproximação desejada e distribuir os polos iniciais uniformemente, equidistantes entre si, ao longo da frequência de interesse — região na qual a aproximação será mais satisfatória. Essa abordagem é mais simples e, geralmente, apresenta bons resultados para diversas aplicações (Gustavsen; Semlyen, 1999).

No caso de funções com picos de ressonância visíveis nos dados experimentais, recomenda-se posicionar polos iniciais complexos conjugados com pequena atenuação. As partes imaginárias desses polos devem abranger a faixa de frequência próxima aos picos observados, pois tais picos indicam a presença de pares de polos complexos conjugados na função de transferência característica do sistema. A fraca atenuação assegura que o problema de mínimos quadrados a ser resolvido resulte em uma matriz do sistema bem condicionada. Além disso, distribuir os pares de polos ao longo da faixa de frequência diminui a chance de relocalizações significativas, reduzindo a necessidade de múltiplas iterações.

A seleção dos polos iniciais pode seguir a configuração apresentada no Algoritmo 3, contemplando a definição do número de polos — neste exemplo, dezesseis polos — além da alocação dos polos iniciais, que, neste exemplo, são distribuídos linearmente ao longo da faixa de frequência.

---

#### **Algoritmo 3 – Definição do número e alocação dos polos iniciais.**

---

```

1: Np = 16;
2: Ns = length(s);
3: bet = linspace(w(1), w(Ns/2), Np/2);
4: poles = [];
5: for n = 1:length(bet)
6:   alf = -bet(n) * 1e-2;
7:   poles = [poles (alf - j * bet(n)) (alf + j * bet(n))];
8: end

```

---

**Fonte:** Autoria própria.

O parâmetro `bet` é usualmente declarado de forma linearmente espaçada na faixa de frequência de interesse. Contudo, para respostas em frequência com comportamentos dinâmicos notáveis em uma ampla faixa de frequência, recomenda-se o uso de um espaçamento logarítmico dos polos iniciais (Gustavsen, 2013).

#### 2.5.4 Matriz Bidimensional de Pesos/Ponderações

A matriz bidimensional de pesos deve ter o mesmo número de linhas e colunas da matriz bidimensional de resposta em frequência. Ao modelar sistemas ou dispositivos que interagem com outros elementos do sistema elétrico, é possível que ocorram amplificações de erro — em simulações com o modelo obtido — quando a impedância da rede conectada difere significativamente da impedância utilizada na medição. Esse tipo de distorção pode ser minimizado por meio de uma ponderação adequada dos dados de entrada. As recomendações de ponderações empregadas na aplicação do algoritmo estão organizadas no Algoritmo 1.

**Quadro 1 – Esquemas de ponderação recomendados no *Vector Fitting*.**

<b>Esquema</b>	<b>Ponderação Independente</b>	<b>Ponderação Comum</b>
Sem peso	<code>weight = ones(Nc, Ns);</code>	<code>weight = ones(1, Ns);</code>
Peso inverso forte	<code>weight = 1 ./ abs(f);</code>	<code>weight = zeros(1, Ns);</code> <code>for k = 1:Ns</code> <code>weight(1, k) = 1/norm(f(:, k));</code> <code>end</code>
Peso inverso fraco	<code>weight =</code> <code>1 ./ sqrt(abs(f));</code>	<code>weight = zeros(1, Ns);</code> <code>for k = 1:Ns</code> <code>weight(1, k) =</code> <code>1 / sqrt(norm(f(:, k)));</code> <code>end</code>

Fonte: Adaptado de Gustavsen (2013)

A ponderação inversa forte é indicada em situações nas quais se deseja atribuir um peso maior aos elementos de menor magnitude da resposta em frequência, de modo a minimizar a variação relativa, em vez da variação absoluta. Nesse caso, ao ajustar um vetor, aplica-se um peso mais elevado aos elementos de menor magnitude em comparação aos de maior valor. Contudo, quando a função de transferência apresenta níveis significativos de ruído, essa abordagem pode tornar-se problemática, já que o conteúdo de ruído em relação à intensidade do sinal tende a ser mais expressivo em regiões de menor amplitude, levando o *Vector Fitting* a ajustar também o componente ruidoso. Esse efeito pode ser atenuado adotando-se uma ponderação inversa mais suave, que reduz a influência excessiva dos elementos de baixa magnitude.

No manual de usuário do *Vector Fitting*, Gustavsen (2013) recomenda que, ao modelar funções de transferência puras, como a função de propagação na modelagem de linha de transmissão, não se utilize ponderação, a menos que uma faixa de frequência específica tenha importância especial para a aplicação. Além disso, é importante observar que a própria distribuição dos pontos de amostragem já é uma forma de ponderação: aumentar a densidade de amostras em uma faixa de frequência faz com que o solucionador de mínimos quadrados atribua naturalmente maior peso a essa região do espectro.

### 2.5.5 Estruturas Opcionais

Existe a possibilidade de utilizar estruturas opcionais como complemento ao ajuste, permitindo maior flexibilidade na utilização do algoritmo. Essas opções incluem, por exemplo, a autorização do uso de polos instáveis, a configuração dos parâmetros de retorno da função e ajuste de opções de plotagem. O Quadro 2 apresenta cada uma dessas estruturas opcionais e suas respectivas finalidades.

**Quadro 2 – Parâmetros da estrutura `opts` no *Vector Fitting*.**

Parâmetro	Finalidade/Descrição	Valor Padrão
<code>opts.stable</code>	0 → Permite polos instáveis 1 → Garante polos estáveis por espelhamento	1
<code>opts.asymp</code>	0 → Modelo com $d = 0, e = 0$ 1 → Modelo com $d \neq 0, e = 0$ 2 → Modelo com $d \neq 0, e \neq 0$	2
<code>opts.relax</code>	1 → Habilita relaxamento da restrição de não trivialidade	1
<code>opts.skip_pole</code>	1 → Ignora o cálculo dos polos	0
<code>opts.skip_res</code>	1 → Ignora o cálculo de $C, d, e$ (útil para acelerar a execução)	0
<code>opts.complx_ss</code>	1 → Modelo no espaço de estados complexo ( $A, b, C, d, e$ , com $A$ sendo uma matriz diagonal.) 0 → Modelo real com $A$ em blocos diagonais	1
<code>opts.spy1</code>	1 → Gera gráfico da magnitude da primeira etapa do VF (identificação dos polos)	0
<code>opts.spy2</code>	1 → Gera gráfico da magnitude da aproximação final	1
<code>opts.logx</code>	1 → Eixo $x$ logarítmico 0 → Eixo $x$ linear	1
<code>opts.logy</code>	1 → Eixo $y$ logarítmico 0 → Eixo $y$ linear	1
<code>opts.errplot</code>	1 → Inclui gráfico de erro (diferença entre curva ajustada e original)	1
<code>opts.phaseplot</code>	1 → Gera gráfico adicional com o ângulo de fase	0
<code>opts.legend</code>	1 → Exibe legenda nos gráficos	1

Fonte: Adaptado de Gustavsen (2013).

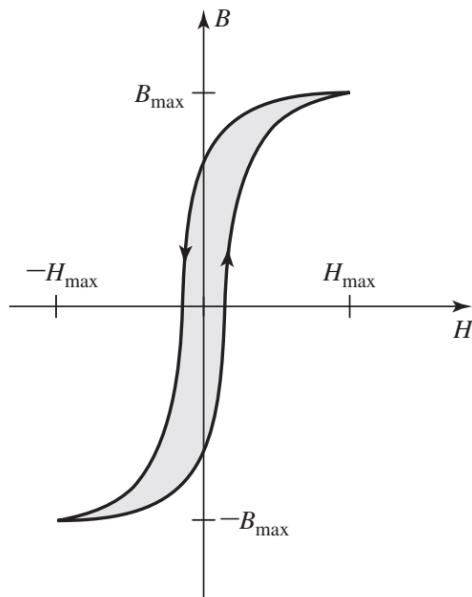
## 2.6 Modelo Teórico do Transformador

Para a identificação de um transformador de potência, é aquisitada a sua resposta em frequência e, em seguida, é estimado um modelo a partir dos dados obtidos utilizando o algoritmo *Vector Fitting*. Os transformadores de potência podem ser representados por meio de circuitos equivalentes que modelam fenômenos eletromagnéticos relacionados ao fluxo magnético, perdas e acoplamentos entre os enrolamentos, essenciais para a análise no domínio do tempo e no domínio da frequência.

Podem ser citados três elementos físicos presentes em todo transformador de potência: núcleo magnético, enrolamento primário e enrolamento secundário; os autotransformadores possuem uma peculiaridade em que um único enrolamento atua como primário e secundário. O núcleo possui a função de efetuar o acoplamento magnético entre os enrolamentos, sendo composto por chapas de aço silício com alta permeabilidade magnética, facilitando a concen-

tração do fluxo magnético. No entanto, o núcleo apresenta perdas por histerese<sup>7</sup> e correntes parasitas<sup>8</sup>, fatores relevantes para a modelagem de um transformador. A Figura 2, adaptada do livro *Electric Machinery*, de Fitzgerald, Jr. e Umans (2003), evidencia o ciclo de histerese típico, no qual  $B$  representa a densidade de fluxo magnético e  $H$  corresponde à intensidade do campo magnetizante. Os valores  $B_{\max}$  e  $H_{\max}$  indicam, respectivamente, os níveis máximos de indução magnética e de campo aplicados ao material.

**Figura 2 – Ciclo de histerese típico.**



**Fonte:** Adaptado de Fitzgerald, Jr. e Umans (2003).

Os enrolamentos primário e secundário são constituídos por condutores de cobre ou alumínio, dispostos em torno do núcleo magnético. Esses enrolamentos apresentam indutância de dispersão e reatância indutiva, decorrentes do fluxo magnético que não se acopla completamente entre eles. Além disso, possuem resistência elétrica, conhecida como resistência série — ou “perdas no cobre” — a qual é responsável pelas perdas por efeito Joule<sup>9</sup>.

Deve-se analisar nos enrolamentos as indutâncias de dispersão e a indutância de magnetização. As indutâncias de dispersão surgem porque parte do fluxo magnético gerado por cada enrolamento não se acopla ao outro. Essa indutância é modelada como um elemento série no circuito equivalente. Já a indutância de magnetização origina-se do fato de que parte do fluxo que se acopla entre os enrolamentos é responsável por energizar o núcleo. Sendo assim, a indutância de magnetização é representada como uma ramificação em paralelo do circuito principal, também chamada de *shunt*, e está associada à permeabilidade do núcleo.

Considerando as resistências dos enrolamentos, as indutâncias de dispersão primária e secundária, as perdas no núcleo e a indutância de magnetização, pode-se estabelecer um

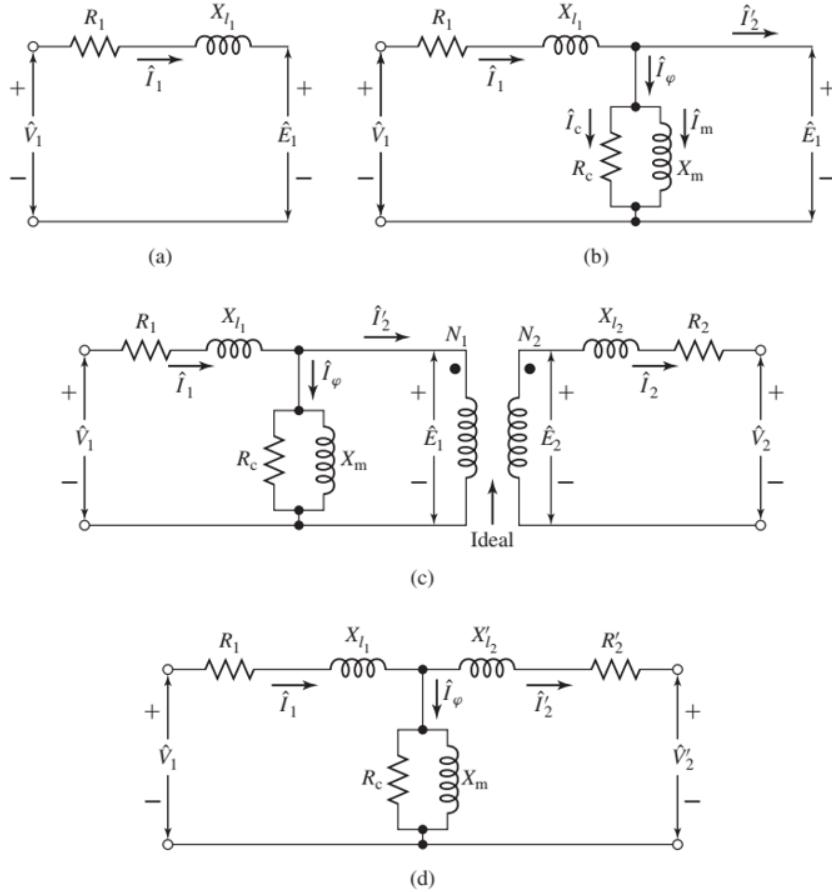
<sup>7</sup> Perdas por histerese são consequência da magnetização e desmagnetização do material a cada ciclo de corrente alternada, ocasionando dissipação de energia em forma de calor.

<sup>8</sup> Correntes parasitas são correntes elétricas induzidas no próprio núcleo metálico do transformador devido à variação do campo magnético; geram calor, resultando em perda de energia.

<sup>9</sup> Conversão de energia elétrica em calor quando uma corrente percorre um condutor com resistência.

modelo de circuito equivalente para representar com fidelidade o comportamento de um transformador de potência real, em frequências nominais de operação e referenciado no enrolamento primário. Tal modelo pode ser construído seguindo algumas etapas, conforme apresentado na Figura 3, do livro *Electric Machinery* de Fitzgerald, Jr. e Umans (2003).

**Figura 3 – Sequência de etapas para determinação do modelo de circuito equivalente.**

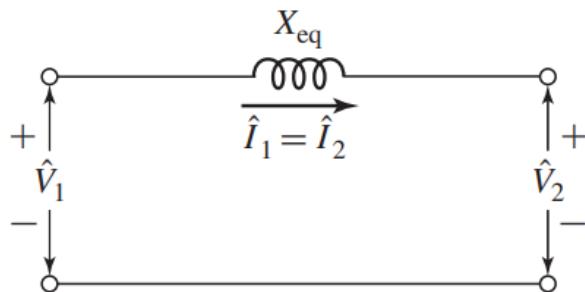


**Fonte:** *Electric Machinery*, de Fitzgerald, Jr. e Umans (2003).

Além disso, no modelo apresentado na Figura 3, é possível aplicar algumas hipóteses simplificadoras para reduzir ainda mais o circuito equivalente do transformador. Considerando as proporções relativas dos valores de resistência e reatância indutiva dos enrolamentos, é válido ignorar a contribuição da resistência para as impedâncias série do primário e do secundário. Ademais, analisando a parcela *shunt* do circuito, percebe-se que seus valores de impedância são elevados e, portanto, esse elemento em paralelo pode ser desconsiderado no modelo nominal de 60 Hz simplificado. Isso é especialmente válido quando se deseja representar o transformador em operação com carga nominal, pois a corrente de magnetização do núcleo torna-se muito inferior à corrente de carga. Assim, a Figura 4 apresenta o modelo simplificado do transformador, considerando as hipóteses previamente discutidas. Ademais, no Quadro 3 são definidas as variáveis empregadas na elaboração do circuito equivalente do transformador e no modelo nominal de 60 Hz.

À medida que a frequência aumenta, não linearidades são reveladas em elementos do transformador, que afetam o sistema e tornam ineficazes os modelos puramente determi-

**Figura 4 – Modelo nominal de 60 Hz simplificado do circuito equivalente do transformador.**



Fonte: *Electric Machinery*, de Fitzgerald, Jr. e Umans (2003).

**Quadro 3 – Descrição das variáveis do circuito equivalente do transformador.**

Variável	Descrição
$R_1$	Resistência do enrolamento do primário.
$R_2$	Resistência do enrolamento do secundário.
$R'_2$	Resistência do secundário referida ao primário.
$X_{l_1}$	Reatância de dispersão do primário.
$X_{l_2}$	Reatância de dispersão do secundário.
$X'_{l_2}$	Reatância de dispersão do secundário referida ao primário.
$X_{eq}$	Reatância equivalente total do transformador no modelo nominal a 60 Hz.
$\hat{V}_1$	Tensão fasorial aplicada ao primário.
$\hat{V}_2$	Tensão fasorial no secundário.
$\hat{V}'_2$	Tensão do secundário referida ao primário.
$\hat{I}_1$	Corrente fasorial do primário.
$\hat{I}_2$	Corrente fasorial do secundário.
$\hat{I}'_2$	Corrente do secundário referida ao primário.
$\hat{E}_1$	Força Eletromotriz (FEM) interna do primário.
$\hat{E}_2$	FEM interna do secundário.
$\hat{I}_c$	Corrente de excitação responsável pelas perdas no núcleo.
$R_c$	Resistência equivalente às perdas no núcleo.
$X_m$	Reatância de magnetização.
$\hat{I}_m$	Corrente de magnetização.
$\hat{I}_\varphi$	Corrente total de excitação.
$N_1$	Número de espiras do enrolamento primário.
$N_2$	Número de espiras do enrolamento secundário.

Fonte: Autoria própria.

nísticos. Esse efeito pode ser observado, por exemplo, no aumento das perdas no núcleo — perdas por histerese e por correntes parasitas — e no acoplamento do fluxo de dispersão com estruturas metálicas. Em frequências elevadas, o campo magnético varia rapidamente, e materiais metálicos próximos podem comportar-se como elementos reativos, criando ressonâncias ou indutâncias e capacitâncias parasitas. Portanto, o *Vector Fitting* apresenta-se como uma ferramenta eficaz, pois permite estimar modelos racionais diretamente a partir da resposta em frequência medida, capturando o comportamento real do transformador e efeitos não modelados fisicamente, presentes na prática. Os dados que descrevem esses comportamentos dinâmicos em altas frequências podem ser obtidos por meio de um VNA, que realiza a coleta da resposta em frequência sem a necessidade de conhecer os circuitos internos do transformador.

## 2.7 Aquisição Experimental dos Dados

A obtenção experimental dos dados necessários para a aplicação pretendida é crucial, pois a qualidade da estimativa do modelo é diretamente impactada pela precisão e confiabilidade desses dados. As diversas fontes de ruído e incerteza devem ser consideradas durante o processo de aquisição dos dados e é essencial que os equipamentos, instrumentos e procedimentos utilizados sejam robustos o suficiente para minimizar tais efeitos. Nesse contexto, esta seção discute o uso do VNA, um equipamento amplamente utilizado para coletar dados de resposta em frequência, no formato apresentado na Seção 2.1.

O VNA é um instrumento eletrônico de medição empregado na análise de sistemas dinâmicos interfaceados por portas, ou seja, pontos onde sinais elétricos entram ou saem de um sistema, nesse contexto, denominado Dispositivo Sob Teste (DUT — *Device Under Test*) (Tektronix, 2016). Sua capacidade de excitar e medir sinais refletidos e transmitidos confere-lhe amplas possibilidades de análise, modelagem e validação em sistemas diversos. Nesse contexto, a principal funcionalidade explorada por esse equipamento é a Análise de Resposta em Frequência com Varredura — *Sweep Frequency Response Analysis* — que emprega excitações senoidais para uma porta e adquire a resposta do sistema nas suas demais portas, fazendo isso para uma sequência de pontos de frequência, distribuídos em uma faixa definida pelo usuário.

Não apenas isso, mas o VNA, com sua capacidade de mensurar sinais refletidos na porta excitada, também pode calcular os parâmetros de espalhamento, conforme descrito na Seção 2.2. Portanto, o VNA é um equipamento ideal para coletar os valores complexos de ganho do sistema, seja na forma de parâmetros de impedância, admitância ou espalhamento, compatíveis com o algoritmo do *Vector Fitting*. A Figura 5 mostra o analisador de redes E5061B ENA Vector Network Analyzer, disponível no site oficial da fabricante Keysight (Keysight Technologies, 2025).

**Figura 5 – Analisador de redes E5061B ENA Vector Network Analyzer da Keysight.**



**Fonte:** Site oficial da Keysight (Keysight Technologies, 2025).

A fim de que os dados medidos pelo VNA sejam precisos e confiáveis, é importante compreender a sua estrutura de portas de medição, bem como os tipos de conexões e ponteiras utilizadas. Esses aspectos determinam diretamente a qualidade das aquisições, especialmente

em frequências elevadas. Um VNA pode ser caracterizado pelo seu número de portas, que pode ser unidirecional (*1-port*), bidirecional (*2-port*) ou multiporta (*N-port*).

No instrumento unidirecional, há somente uma interface disponível para excitar o DUT e a única medição realizada é a do sinal refletido na mesma porta, sendo que esse tipo de canal é suficiente, por exemplo, para o emprego na análise de sistemas como antenas, em que apenas a impedância de entrada é de interesse da análise. Já em um VNA bidirecional existem duas portas de interface disponíveis, permitindo que o instrumento excite o DUT por uma porta e, simultaneamente, meça tanto o sinal refletido quanto o sinal transmitido pela outra porta. Esse tipo de configuração abrange uma caracterização mais completa do sistema, porém, seu número de portas limita a análise de sistemas multiportas mais complexos. Desta forma, o tipo mais versátil e completo de VNA é o multiporta, que envolve múltiplos canais de excitação e medição, possibilitando uma observação mais ampla do DUT. Com esta configuração, a obtenção da matriz de espalhamento do sistema é direta, sem a necessidade de reorganização física das conexões e dos componentes de *hardware* utilizados.

Considerando as funcionalidades mencionadas anteriormente, destaca-se que os VNAs ajustam uma fonte de sinal com múltiplos receptores, permitindo a formação de um sistema de medição em malha fechada que possibilita caracterizações precisas em magnitude e fase. Essa característica é necessária para aplicações que requerem informações vetoriais, como o ajuste fino de modelos através do algoritmo *Vector Fitting*.

Para a escolha de um VNA, é fundamental considerar alguns parâmetros técnicos que influenciam diretamente a qualidade e a confiabilidade das medições:

- (i) **Faixa de frequência:** define os limites inferior e superior de operação do instrumento e deve abranger tanto a faixa de interesse do DUT quanto eventuais harmônicos relevantes, especialmente em medições envolvendo componentes ativos;
- (ii) **Velocidade de medição:** corresponde ao tempo necessário para a realização completa de uma varredura;
- (iii) **Ruído de traço (*trace noise*):** associado a pequenas variações nas medições decorrentes de ruídos internos do instrumento;
- (iv) **Faixa dinâmica:** representa a diferença entre o maior e o menor nível de sinal que o VNA consegue medir com precisão.

Tratando-se de VNAs, a calibração também é relevante. Embora seja feita uma calibração de fábrica, o procedimento de calibração em campo é indispensável para eliminar erros sistemáticos decorrentes de adaptadores, cabos e outros acessórios de conexão. Entre os métodos mais utilizados, destacam-se aqueles baseados em padrões mecânicos do tipo SOLT (*Short-Open-Load-Thru*) e os que utilizam dispositivos eletrônicos de calibração (ECal), mais simples e ágeis, com boa precisão.

Sobre o método SOLT, distingue-se cada operação: *Short* refere-se à conexão em curto-circuito; *Open* refere-se à conexão de um circuito aberto com características bem definidas;

*Load* diz respeito à conexão de uma carga de  $50 \Omega$ , idealmente sem reatância; *Thru* relaciona-se à conexão direta entre duas portas, para medição de transmissão. Cada padrão é conectado à porta do VNA e, então, o equipamento executa medições específicas utilizadas para o cálculo do erro e ajuste matemático de resultados futuros.

Já para o método ECal, um módulo eletrônico externo é conectado ao VNA via *Universal Serial Bus* (USB). O módulo simula internamente os diversos padrões SOLT, sem a necessidade de trocas manuais. O procedimento de calibração é sequenciado desta forma: conexão do módulo de ECal às portas do VNA, início do processo de calibração no *software* do instrumento e, por fim, comando do módulo a partir do próprio VNA para gerar as condições de calibração de maneira automática. Este método é mais rápido e eficaz, oferecendo excelente repetibilidade, apesar de ser mais custoso financeiramente.

Além das medições no domínio da frequência, alguns VNAs possibilitam medições no domínio do tempo a partir da aplicação de transformadas inversas de Fourier nos dados em frequência, algo proveitoso para identificação de falhas em cabos ou descontinuidades, visto que se torna possível o mapeamento físico de onde ocorrem reflexões ou perdas de sinal.

Dentre os principais fabricantes de VNAs no mercado, destacam-se os seguintes: Rohde & Schwarz, Tektronix, Keysight Technologies, Anritsu e Copper Mountain Technologies. Conforme previamente mencionado, o VNA é amplamente utilizado na validação de antenas, linhas de transmissão, conversores, duplexadores, filtros, amplificadores e outros componentes de rádiofrequência e micro-ondas, oferecendo apoio técnico em uma vasta gama de etapas, tais como projeto, prototipagem, validação, fabricação e manutenção em campo.

## 2.8 Síntese

Neste capítulo foram apresentados aspectos técnicos do algoritmo *Vector Fitting*, incluindo sua formulação matemática e detalhes de aplicação, considerando as características do problema de identificação do transformador de potência. Inicialmente, foram abordadas as principais matrizes características de sistemas elétricos, impedância ( $Z$ ), admitância ( $Y$ ) e espalhamento ( $S$ ), salientando suas propriedades e aplicabilidade em diferentes faixas de frequência. A robustez da matriz  $S$  em frequências elevadas foi destacada como um ponto importante para a aquisição confiável dos dados experimentais no problema proposto.

Em seguida, foram discutidas as diferentes representações matemáticas de sistemas dinâmicos, como a representação em espaço de estados e funções de transferência, que formam base conceitual para a correta implementação e interpretação dos resultados obtidos a partir do *Vector Fitting*.

Também foi analisada a formulação matemática do algoritmo e sua aplicação no *software* MATLAB®. A simplicidade e eficiência do algoritmo destacam-se como diferenciais para sua ampla utilização. Ao realizar a aproximação de uma função racional a partir de dados no domínio da frequência, o *Vector Fitting* permite a obtenção dos parâmetros de um modelo na forma de

espaço de estados, abrindo vias para a análise e desenvolvimento de projetos envolvendo o sistema em questão.

Demonstrou-se, de maneira simplificada, o modelo teórico do transformador, seus principais elementos, a representação em circuito equivalente e as não linearidades associadas. Além disso, discutiu-se a adequação do *Vector Fitting* para a identificação deste tipo de sistema, considerando sua capacidade de estimar modelos racionais que reproduzem o comportamento real do transformador, incluindo efeitos não modelados fisicamente, tendo como base exclusivamente a resposta em frequência medida.

Por fim, este capítulo abordou o *hardware* necessário para a aquisição dos dados utilizados na identificação no domínio da frequência. Foram discutidos diversos aspectos técnicos do funcionamento do VNA, bem como características gerais operacionais do equipamento e os principais fabricantes disponíveis no mercado.

### 3 ESTUDOS DE CASO E ANÁLISES

Neste capítulo são apresentados os critérios de validação empregados após a obtenção dos modelos ajustados por meio do algoritmo *Vector Fitting*, bem como os estudos de caso realizados e as análises dos resultados obtidos. Inicialmente, os métodos de validação são detalhados, estabelecendo as métricas e condições utilizadas para a análise dos resultados. Em seguida, é realizado um exemplo introdutório utilizando um conjunto de dados sintéticos, servindo como base para a compreensão do processo. Posteriormente, são conduzidos dois estudos de caso principais: um com dados reais obtidos por medições de terceiros em um transformador de potência e um com dados experimentais próprios. Em cada estudo, analisam-se as características do modelo ajustado em comparação aos dados originais e verifica-se sua adequação conforme os critérios de validação definidos.

#### 3.1 Critérios de Validação do Modelo Proposto

Após a obtenção do modelo racional por meio do algoritmo *Vector Fitting*, torna-se indispensável estabelecer critérios para validar o modelo obtido e analisar a aderência entre o modelo e o sistema físico real. Assim, serão empregados três critérios de validação do modelo proposto que retratam fisicamente o comportamento do sistema:

- (i) Passividade do modelo, utilizada para garantir a coerência energética;
- (ii) Transferência de tensão, que permite verificar a fidelidade da relação de transformação entre os enrolamentos;
- (iii) Aderência ao modelo nominal de 60 Hz, conforme tratado na Seção 2.6.

É importante ressaltar que os critérios de validação adotados neste trabalho não requerem a conversão dos modelos para o domínio do tempo, uma vez que são aplicados diretamente no domínio  $s$ . Essa abordagem evita a necessidade de gerar respostas transitórias no domínio do tempo, as quais podem ser potencialmente danosas ao equipamento, além de eliminar a exigência de interrupções operacionais para realização de testes experimentais.

##### 3.1.1 Passividade do Modelo

A passividade é um critério de validação indispensável para a identificação de sistemas passivos no domínio da frequência. Fisicamente, a passividade é uma propriedade de sistemas que garante a não geração de energia pelo sistema. Ou seja, se determinada quantidade de energia é injetada no transformador, é impossível extrair mais energia do que foi fornecida. Matematicamente, é possível verificar que isso significa que a matriz de admitância  $\mathbf{Y}$ , a qual relaciona tensões e correntes nos terminais do transformador, deve ser positiva definida (Gustavsen; Semlyen, 2001). Para tanto, parte-se da definição de admitância, como apresentada na

Seção 2.2, e também da fórmula da potência elétrica, dada pela Equação (35), em que  $P$  representa a potência elétrica ativa, em Watts, associada à parte real do produto escalar entre uma tensão  $\mathbf{v}$  e o conjugado de uma corrente  $\mathbf{i}$ . O operador  $H$  em  $\mathbf{i}^H$  indica a transposta conjugada, ou Hermitiano, do vetor  $\mathbf{i}$ .

$$P = \Re\{\mathbf{v}\mathbf{i}^H\}. \quad (35)$$

A partir das definições apresentadas, substitui-se a Equação (4) na Equação (35), obtendo-se a Equação (36), em que  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  representa a parte real da admitância, denominada condutância, e  $\mathbf{B} \in \mathbb{I}^{n \times n}$  corresponde à parte imaginária, chamada susceptância.

$$P = \Re\{\mathbf{v}^H \mathbf{Y} \mathbf{v}\} = \Re\{\mathbf{v}^H (\mathbf{G} + j\mathbf{B}) \mathbf{v}\}. \quad (36)$$

Consequentemente, obtém-se a Equação (37).

$$P = \Re\{\mathbf{v}^H \mathbf{G} \mathbf{v}\}. \quad (37)$$

Logo, a partir da Equação (37), observa-se que a potência elétrica ativa do sistema será sempre positiva — isto é, consumida — apenas quando todos os autovalores de  $\mathbf{G}$ , correspondente à parte real da admitância  $\mathbf{Y}$ , forem positivos. Em outras palavras, a passividade do sistema é garantida se  $\mathbf{G}$  é dita positiva definida (Gustavsen; Semlyen, 2001). Essas condições são expressas nas Equações (38) e (39).

$$\Re\{\mathbf{Y}(j\omega)\} \succ 0 \quad \forall \omega, \quad (38)$$

$$\{\lambda \mid \det(\lambda\mathbf{I} - \Re\{\mathbf{Y}(j\omega)\}) = 0\} > 0. \quad (39)$$

A Equação (38) estabelece que a parte real da matriz de admitância deve ser positiva definida em todas as frequências de interesse. Isso implica que todos os autovalores de  $\Re\{\mathbf{Y}(j\omega)\}$  devem ser estritamente positivos, conforme indicado na Equação (39). Caso algum autovalor seja negativo, o modelo é considerado não passivo e apresenta comportamento não físico, o que pode resultar em instabilidades ou respostas incorretas em simulações no domínio do tempo.

Para cada frequência  $\omega$ ,  $\mathbf{G}(j\omega)$  é uma matriz real e, idealmente, simétrica, considerando as características já discutidas sobre sistemas elétricos. Essa simetria garante que os seus autovalores sejam números reais, simplificando a análise da passividade. Na prática, entretanto, devido a aspectos inerentes às medições físicas experimentais, é difícil que essa matriz apresente simetria perfeita além de algumas casas decimais. Por esse motivo, é possível forçar a simetria da matriz  $\mathbf{G}$  para fins de análise, o que pode ser feito por meio de alguns métodos. Dois desses métodos são: a reflexão da parte triangular superior em torno da diagonal principal

e calcular a média entre elementos simétricos da matriz, de modo que a matriz resultante seja forçosamente simétrica<sup>1</sup>.

Em termos de visualização, é usual a construção de gráficos que exibem os autovalores da matriz de condutância para cada amostra de frequência, tendo a frequência no eixo das abscissas e a magnitude dos valores no eixo das ordenadas. Além disso, são demonstrados em quadros os valores mínimos de cada autovalor em toda a faixa de frequências amostrada, isto é, a máxima violação de passividade. Nota-se que, para uma matriz de admitância de dimensões  $n \times n$ , a matriz de condutância associada terá  $n$  autovalores reais.

Em termos práticos, os modelos racionais obtidos a partir do *Vector Fitting* podem ser não passivos devido a aproximações, limitações numéricas do processo de ajuste ou erros de medição do equipamento. Outros exemplos podem ser encontrados em Gustavsen (2004), em que a aproximação do modelo do transformador no domínio da frequência somente pôde ser utilizada em programas de transitórios eletromagnéticos (EMTP) após a aplicação de técnicas de *passivity enforcement*, que consistem em modificar o modelo obtido de modo a garantir a propriedade de passividade do sistema em análise.

Diante desse cenário, a correção das violações mencionadas pode ser realizada por meio de técnicas de imposição de passividade — do inglês, *passivity enforcement* — as quais ajustam minimamente os parâmetros do modelo de maneira a garantir a positividade dos autovalores sem prejudicar substancialmente a qualidade do ajuste original, assegurando que o modelo resultante seja adequado para simulações de transitórios e fisicamente coerente (Gustavsen; Semlyen, 2001).

Assim sendo, a verificação de passividade é vital tanto sobre os dados medidos quanto sobre o modelo racional ajustado. Caso a condição não seja atendida, é possível aplicar métodos de imposição de passividade, visando a representação correta do comportamento dissipativo do transformador na modelagem e permitindo sua utilização de maneira confiável em análises no domínio do tempo.

### 3.1.2 Transferência de Tensão

Outro critério de validação dos dados experimentais e do modelo obtido é a verificação da transferência de tensão do transformador, ou seja, a relação de transformação entre os terminais de maior tensão e os terminais de menor tensão. Sabe-se que, em uma faixa de frequência próxima à frequência nominal de operação — para o SIN, este valor é de 60 Hz — a relação de transformação deve se manter o mais constante possível, sendo que, quanto maior a faixa de frequência considerada, mais estável tende a ser a operação do transformador durante fenômenos transitórios da rede. Contudo, é natural que a relação de transformação sofra alterações notáveis em elevados valores de frequência (Gustavsen, 2004). Assim, pode-

---

<sup>1</sup> Essa operação é realizada calculando-se a média entre a matriz e sua transposta:  $\frac{\mathbf{G} + \mathbf{G}^T}{2}$ .

se utilizar esse comportamento esperado para validar tanto os dados coletados quanto o modelo obtido através do *Vector Fitting*.

O procedimento de validação por meio da transferência de tensão é apresentado resumidamente em Gustavsen (2004). Dado um transformador com seis terminais, é possível descrever as relações entre corrente e tensão de cada terminal por meio de uma matriz de admitância  $6 \times 6$ , conforme a Equação (40). Cada elemento dessa matriz,  $Y_{nm} = Y_{mn}$ , representa a admitância entre os terminais  $n$  e  $m$ .

Assumindo que os terminais 1, 2 e 3 correspondem ao lado de maior tensão do transformador e os terminais 4, 5 e 6 ao lado de menor tensão, a matriz pode ser dividida em quatro sub-matrizes denominados  $\mathbf{Y}_{\mathbf{HH}}$ ,  $\mathbf{Y}_{\mathbf{HL}}$ ,  $\mathbf{Y}_{\mathbf{LH}}$  e  $\mathbf{Y}_{\mathbf{LL}}$ , que relacionam o primário e o secundário do transformador<sup>2</sup>. Assim, a Equação (40) pode ser reescrita conforme a Equação (41), em que  $\mathbf{I}_\mathbf{H}$  e  $\mathbf{I}_\mathbf{L}$  representam, respectivamente, as correntes dos terminais de maior e menor tensão, enquanto  $\mathbf{V}_\mathbf{H}$  e  $\mathbf{V}_\mathbf{L}$  correspondem, respectivamente, às tensões associadas a esses mesmos terminais.

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & Y_{15} & Y_{16} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} & Y_{25} & Y_{26} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} & Y_{35} & Y_{36} \\ \hline Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} & Y_{45} & Y_{46} \\ Y_{51} & Y_{52} & Y_{53} & Y_{54} & Y_{55} & Y_{56} \\ Y_{61} & Y_{62} & Y_{63} & Y_{64} & Y_{65} & Y_{66} \end{array} \right] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_\mathbf{H} \\ \mathbf{I}_\mathbf{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{\mathbf{HH}} & \mathbf{Y}_{\mathbf{HL}} \\ \mathbf{Y}_{\mathbf{LH}} & \mathbf{Y}_{\mathbf{LL}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_\mathbf{H} \\ \mathbf{V}_\mathbf{L} \end{bmatrix} \quad (41)$$

No caso em que os dois lados do transformador estejam em aberto, ou seja, sem presença de corrente elétrica, de forma que  $\mathbf{I}_\mathbf{H} = \mathbf{I}_\mathbf{L} = \mathbf{0}$ , é possível manipular matematicamente a Equação (41) para determinar a transferência de tensão a partir das admitâncias experimentais. Obtém-se, assim, as Equações (42) e (43), sendo que  $\mathbf{V}_{\mathbf{HL}}$  e  $\mathbf{V}_{\mathbf{LH}}$  são matrizes  $3 \times 3$ , em que os elementos de suas diagonais são as relações de transformação entre os enrolamentos de mesma fase do transformador.

$$\mathbf{V}_{\mathbf{HL}} = -(\mathbf{Y}_{\mathbf{HH}})^{-1} \mathbf{Y}_{\mathbf{HL}}, \quad (42)$$

$$\mathbf{V}_{\mathbf{LH}} = -(\mathbf{Y}_{\mathbf{LL}})^{-1} \mathbf{Y}_{\mathbf{LH}}. \quad (43)$$

---

<sup>2</sup> O subscrito *H* se refere ao lado de maior tensão e o subscrito *L* ao lado de menor tensão.

É importante destacar que, nos blocos de matrizes  $\mathbf{Y}_{HH}$  e  $\mathbf{Y}_{LL}$ , os elementos da diagonal principal correspondem aos valores de admitância própria dos respectivos enrolamentos e, portanto, seus valores devem ser, necessariamente, comparativamente superiores aos demais elementos da matriz. Seguindo essa mesma lógica, é correto afirmar que os elementos dos blocos  $\mathbf{Y}_{HL}$  e  $\mathbf{Y}_{LH}$  apresentam valores de magnitude significativamente menores, pois representam o acoplamento entre enrolamentos de lados distintos do transformador<sup>3</sup>. Além disso, uma observação relevante pode ser feita sobre a comparação entre as magnitudes relativas das admitâncias próprias dos lados de maior e menor tensão. Como os enrolamentos de maior tensão utilizam espiras de cobre com bitolas menores — o que implica impedâncias maiores — sua admitância própria tende a ser inferior à dos enrolamentos de menor tensão, que utilizam bitolas maiores e, portanto, apresentam menor impedância e maior admitância.

Dessa forma, traça-se um gráfico comparando os valores calculados de transferência de tensão para os dados experimentais e ajustados, para toda a faixa de frequência empregada nas medições. Esse gráfico pode ser produzido tanto do ponto de vista do lado de maior para menor tensão quanto o oposto. Nesse caso espera-se que, em frequências nominais, um seja o inverso do outro.

Além disso, em um transformador ideal, espera-se que a relação entre os terminais de maior e menor tensão mantenha-se estritamente constante ao longo de toda a faixa de frequências. Contudo, na prática, devido a efeitos de dispersão de fluxo magnético, indutâncias entre enrolamentos e capacitâncias parasitas, essa relação sofre distorções conforme a frequência de excitação aumenta. Esse comportamento também é observado experimentalmente em Gustavsen (2004).

A comparação entre os valores de transferência de tensão medidos e os calculados a partir do modelo fornece uma indicação direta da qualidade da identificação realizada. Uma boa concordância entre ambos e o comportamento esperado do transformador sugere que os dados coletados e o modelo estimado são válidos, reproduzindo adequadamente a dinâmica do transformador. Discrepâncias significativas podem indicar defeitos do transformador, problemas de medição, baixa precisão do modelo ou outras limitações do método empregado.

### 3.1.3 Aderência ao Modelo Teórico

Por fim, o modelo obtido — assim como a medição experimental — pode ser validado por meio da sua comparação direta com a dinâmica prevista pelo modelo teórico do transformador em frequências nominais, apresentado na Seção 2.6. Ressalta-se, porém, que esse modelo teórico não reproduz, com fidedignidade, o comportamento dinâmico do equipamento em altas frequências, em razão do surgimento de acoplamentos capacitivos e indutivos significativos entre os seus componentes. Assim, a comparação deve ser restrita à faixa inicial da resposta

---

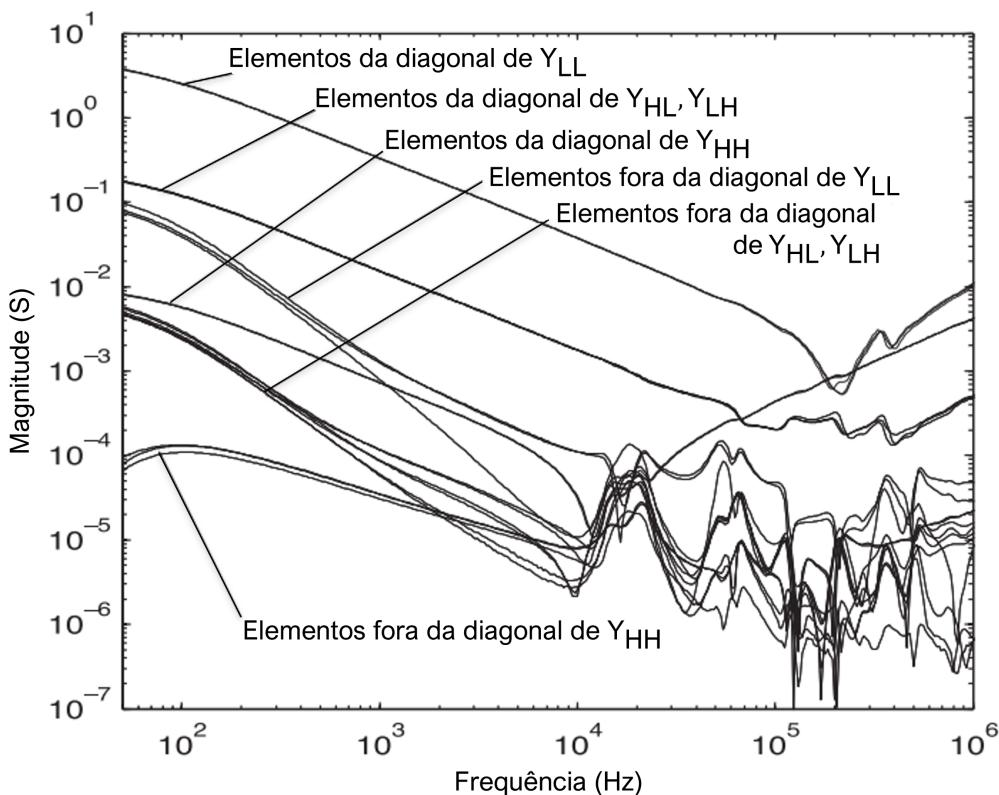
<sup>3</sup> É esperado que os elementos da diagonal principal de  $\mathbf{Y}_{HL}$  e  $\mathbf{Y}_{LH}$  apresentem magnitudes relativamente elevadas, uma vez que representam o acoplamento entre os lados de maior e menor tensão de uma mesma fase, onde o acoplamento magnético é mais forte.

em frequência, correspondente à região próxima da operação nominal do transformador, para a qual o modelo foi originalmente desenvolvido e descrito na literatura.

Nesse contexto, o modelo nominal simplificado é composto por uma única indutância, conforme mostrado na Figura 4. Esse elemento traduz-se em uma impedância com o valor de  $j\omega L$  e, consequentemente, admitância de  $\frac{1}{j\omega L}$ , ou  $-\frac{j}{\omega L}$ . Dessa forma, a magnitude da resposta em frequência desse modelo apresenta um decréscimo de 20 dB a cada década de frequência, isto é, uma curva característica de sistemas com um único polo na origem. Por meio dessa relação, é possível estimar o valor aproximado da indutância de cada enrolamento do transformador. Espera-se, portanto, que os dados coletados e ajustados sigam essa característica apresentada pelo modelo nominal de 60 Hz, respeitando as limitações apresentadas anteriormente. Um exemplo do comportamento esperado do transformador é ilustrado na Figura 6, retirada de Gustavsen (2004). Conforme mencionado, observa-se que em frequências elevadas — acima de  $10^4$  Hz no gráfico — fenômenos eletromagnéticos não previstos pelo modelo nominal simplificado passam a dominar o comportamento dinâmico do transformador.

Assim, é possível traçar a curva característica correspondente ao comportamento previsto pelo modelo teórico nominal de 60 Hz e compará-la à curva da resposta em frequência medida das admitâncias próprias dos enrolamentos do transformador. Desta forma, espera-se observar a semelhança entre ambas na faixa inicial de frequência, o que corrobora a coerência dos dados medidos e ajustados com a dinâmica do sistema.

**Figura 6 – Curvas de magnitude dos elementos de admitância medidos de um transformador.**



**Fonte:** Adaptado de Gustavsen (2004).

### 3.2 Estudos de Caso

A avaliação do modelo ajustado por meio do algoritmo *Vector Fitting* é realizada com base em uma série de estudos de caso apresentados nesta seção. Primeiramente, é realizado um exemplo com dados sintéticos, com o objetivo de ilustrar o processo de ajuste e estabelecer uma referência para as análises subsequentes. Em seguida, são examinados dois conjuntos de dados reais de transformadores de potência: um proveniente de medições realizadas por terceiros e um obtido a partir de medições experimentais próprias. Para cada estudo de caso, os dados utilizados e os resultados do ajuste são analisados segundo os critérios de validação definidos na Seção 3.1, permitindo verificar a validade dos dados e do modelo proposto em representar adequadamente o comportamento dinâmico dos sistemas avaliados.

#### 3.2.1 Estudo de Caso 1: Dados Sintéticos

Este primeiro estudo de caso apresenta um sistema MIMO genérico de duas entradas e duas saídas, simulado com dados sintéticos. Para isso, sintetiza-se uma matriz de transferência responsável por gerar esses dados. Assim, definem-se os polos e zeros das funções de transferência individuais, de acordo com os seguintes critérios:

- (i) Funções de transferência estritamente próprias;
- (ii) Todos os polos estão no semiplano esquerdo do plano complexo;
- (iii) Pares de polos complexos conjugados levemente amortecidos;
- (iv) Funções de transferência fora da diagonal principal devem ser idênticas entre si.

O emprego dos dois primeiros critérios na síntese das funções que compõem a matriz de transferência assegura, respectivamente, a causalidade e a estabilidade do modelo. A adoção de polos complexos conjugados levemente amortecidos evidencia o comportamento ressonante do modelo na análise em frequência. Já a igualdade entre as funções de transferência fora da diagonal principal confere simetria à matriz — o que, tratando-se uma matriz de impedâncias<sup>4</sup> de um sistema elétrico, implica que a impedância de um ponto  $a$  ao ponto  $b$  é equivalente à do ponto  $b$  ao  $a$ .

Todos os zeros escolhidos são reais, e posicionados distantes dos polos, evitando que ocorra a atenuação parcial ou completa dos picos de ressonância relativos a esses polos. Cada função de transferência é multiplicada por um ganho  $k_i$ , ajustando a magnitude da resposta em frequência para compatibilidade com o algoritmo *Vector Fitting*. Segundo esses critérios, a matriz de transferência  $H(s)$  pode ser definida conforme apresentada na Equação (44), com seus elementos individuais especificados nas Equações (45) — (47).

---

<sup>4</sup> A mesma interpretação aplica-se às matrizes de admitâncias e de parâmetros de espalhamento.

$$\mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{bmatrix}, \quad (44)$$

$$H_{11}(s) = k_1 \frac{(s+50)(s+100)}{(s+(0,2 \pm 200j))(s+(20 \pm 5000j))(s+(100 \pm 24000j))(s+600)}, \quad (45)$$

$$H_{12}(s) = H_{21}(s) = k_2 \frac{(s+20)}{(s+(40 \pm 4000j))(s+1000)(s+9000)(s+30000)}, \quad (46)$$

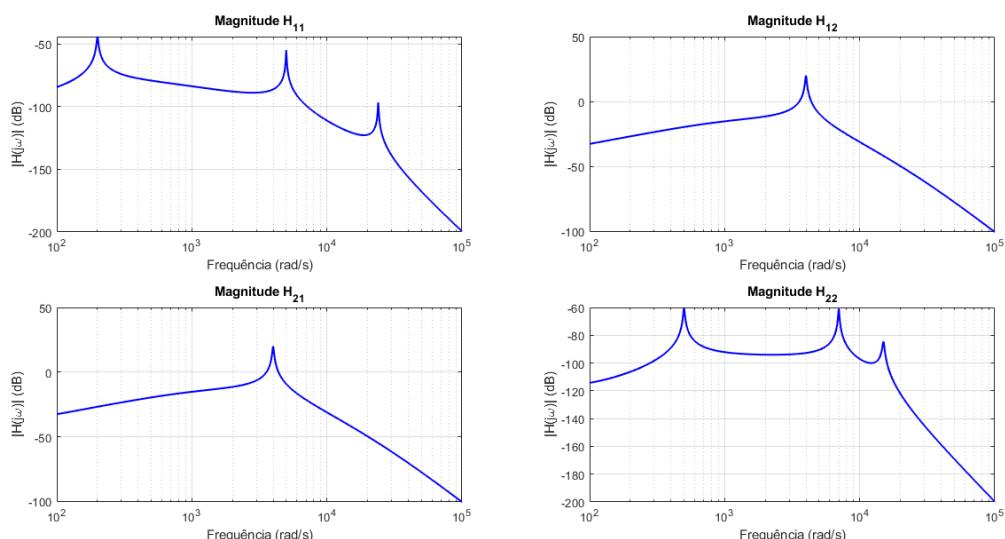
$$H_{22}(s) = k_3 \frac{(s+100)(s+150)}{(s+(5 \pm 500j))(s+(50 \pm 7000j))(s+(200 \pm 15000j))(s+5000)}. \quad (47)$$

Para verificar o comportamento dinâmico da matriz de transferência com relação à magnitude e defasagem em função da frequência de excitação, é obtida a resposta em frequência de cada elemento da matriz, gerando uma matriz de resposta em frequência, que será passada como dado de entrada ao algoritmo *Vector Fitting*. Cada elemento dessa matriz pode ser representado conforme a Equação (48), em que, para cada ponto de frequência  $\omega$ ,  $|H_{ij}(j\omega)|$  é a magnitude e  $\angle H_{ij}(j\omega)$  a fase de sua resposta em frequência. A matriz de resposta em frequência foi construída com 1200 pontos, logaritmicamente espaçados ao longo da faixa de  $10^2$  até  $10^5$  rad/s.

$$H_{ij}(j\omega) = |H_{ij}(j\omega)|e^{j\angle H_{ij}(j\omega)}. \quad (48)$$

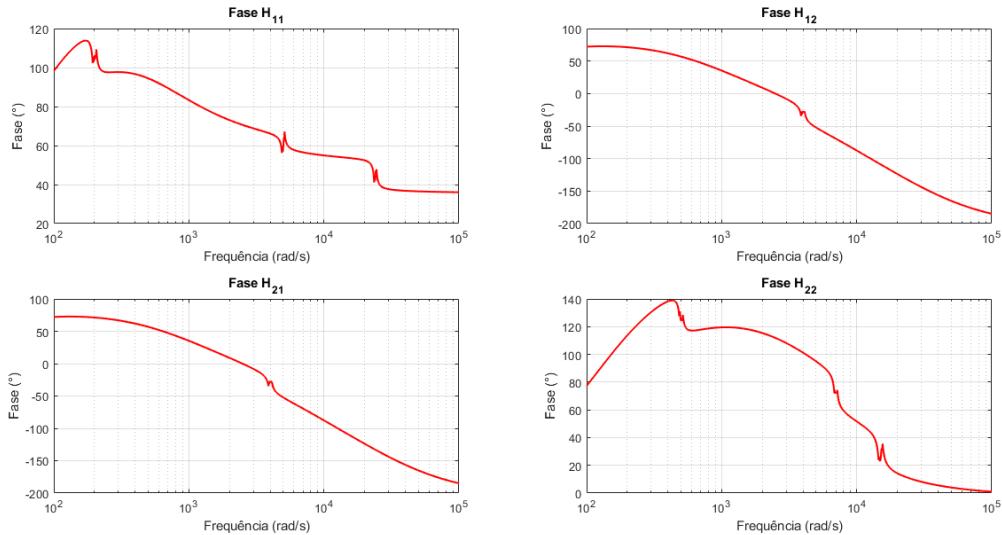
A partir dos dados obtidos são traçadas as curvas de magnitude e fase de cada um dos elementos da matriz de transferência, apresentadas nas Figuras 7 e 8.

**Figura 7 – Curvas de magnitude da resposta em frequência — Estudo de Caso 1.**



**Fonte: Autoria própria.**

**Figura 8 – Fase da resposta em frequência — Estudo de Caso 1.**



**Fonte:** Autoria própria.

Na Figura 7 observa-se nitidamente os picos de ressonância dos polos complexos conjugados escolhidos. Também nota-se que os elementos da diagonal secundária são idênticos, evidenciando a simetria da matriz sintetizada.

Dessa forma, é possível iniciar o processo de ajuste que, neste exemplo, será do tipo MIMO, ou seja, um único ajuste simultâneo com todos os dados da matriz de resposta em frequência. Portanto, o primeiro passo é organizar os dados de forma que o algoritmo possa interpretá-los corretamente, conforme elucidado na Seção 2.5. Isso significa empilhar os dados de resposta em frequência de cada elemento em linhas, o que pode ser feito via código da maneira apresentada no Algoritmo 4.

---

**Algoritmo 4 – Organização dos dados para ajuste MIMO no domínio da frequência.**

---

```

1: tell = 0;
2: for col=1:size(Hjw2x2, 1)
3:   for row=col:size(Hjw2x2, 1)
4:     tell = tell + 1;
5:     f(tell, :) = squeeze(Hjw2x2(row, col, :)) .';
6:   end
7: end

```

---

**Fonte:** Autoria própria.

Ressalta-se que, por se tratar de uma matriz de transferência simétrica, apenas os dados correspondentes à triangular superior são empilhados. Após o ajuste final dos polos, a realização em espaço de estados resultante é, então, convertida em uma realização MIMO completa por meio da função `tri2full.m`, que reconstrói a matriz completa a partir da forma triangular superior.

Os parâmetros empregados no algoritmo *Vector Fitting* para este ajuste são apresentados no Quadro 4. Dentre eles, destacam-se alguns que merecem atenção especial. Definir

o parâmetro `opts.skip_res = 0` garante que os resíduos, descritos pelas matrizes **C**, **D** e **E**, sejam identificados durante o ajuste. Já o parâmetro `opts.cmplx_ss = 1` assegura que o modelo gerado em espaço de estados seja complexo. Os demais parâmetros relacionados à geração de gráficos são configurados de modo a não produzir nenhuma visualização automática, pois essas serão realizadas manualmente em etapas posteriores.

**Quadro 4 – Parâmetros utilizados no algoritmo *Vector Fitting*.**

Parâmetro	Valor	Descrição
<code>opts.relax</code>	1	Utiliza <i>vector fitting</i> com relaxamento da restrição de não-trivialidade.
<code>opts.stable</code>	1	Impõe polos estáveis.
<code>opts.asymp</code>	2	Inclui os termos <b>D</b> e <b>E</b> na aproximação.
<code>opts.skip_pole</code>	0	Não ignora a identificação de polos.
<code>opts.skip_res</code>	0	Não ignora a identificação de resíduos ( <b>C</b> , <b>D</b> , <b>E</b> ).
<code>opts.cmplx_ss</code>	1	Gera modelo em espaço de estados com coeficientes complexos.
<code>opts.spy1</code>	0	Não gera gráfico da magnitude na primeira etapa do ajuste.
<code>opts.spy2</code>	0	Não gera gráfico da magnitude do ajuste de $f(s)$ .
<code>opts.logx</code>	0	Não usa escala logarítmica no eixo $x$ .
<code>opts.logy</code>	0	Não usa escala logarítmica no eixo $y$ .
<code>opts.errplot</code>	0	Não inclui desvio no gráfico de magnitude.
<code>opts.phaseplot</code>	0	Não gera gráfico de fase.
<code>opts.legend</code>	0	Não inclui legenda nos gráficos.

**Fonte: Autoria própria.**

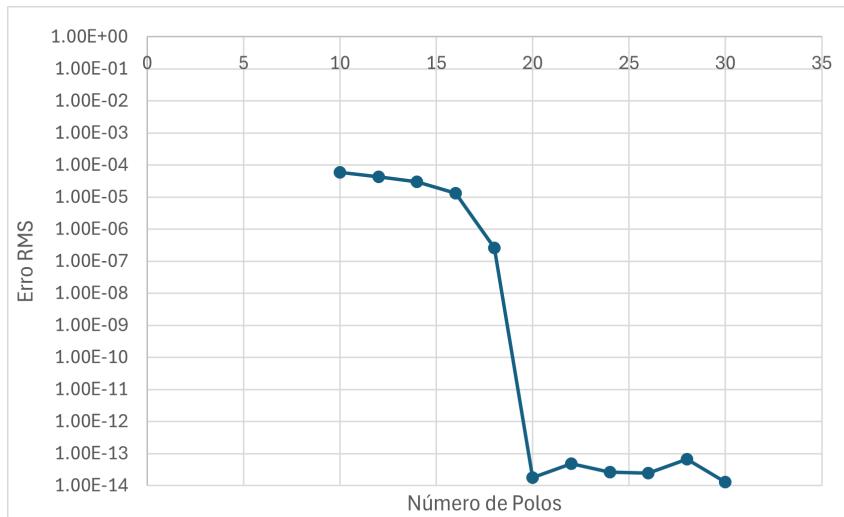
Com relação à escolha dos polos iniciais para o ajuste, trata-se, neste caso, de uma função bem comportada e cujos polos são previamente conhecidos. Por esse motivo, o processo pode ser simplificado, distribuindo-se os polos iniciais — polos complexos e levemente amortecidos — de forma linear ao longo da faixa de frequência definida. Além disso, não é necessário atribuir pesos especiais a faixas específicas de frequência, pelos mesmos motivos apresentados neste parágrafo.

Para definir a ordem mais adequada do ajuste, é conveniente analisar o comportamento do erro RMS (*Root Mean Square*) — isto é, a raiz do erro quadrático médio — entre os valores ajustados e os valores reais, à medida que diferentes ordens do modelo são consideradas. Assim, torna-se possível selecionar uma ordem de ajuste que proporcione um equilíbrio adequado entre a complexidade do modelo e a precisão obtida. A Figura 9 apresenta tal comportamento para o estudo desta seção.

Observa-se uma melhora significativa na qualidade da aproximação a partir de 20 polos iniciais, apresentando instabilidade no erro a partir desse ponto, o que indica um sobreajuste do modelo.

Além desse critério acima apresentado, pode-se também empregar outros critérios de seleção de ordem de ajuste. Um desses critérios é o *Akaike Information Criteria* (AIC), que é uma medida utilizada para comparar modelos matemáticos e estatísticos, levando em consideração não apenas a qualidade da aproximação, mas também sua complexidade, penalizando

**Figura 9 – Erro RMS em função da ordem de ajuste — Estudo de Caso 1.**



**Fonte:** Autoria própria.

modelos excessivamente complexos. Assim, o AIC permite ordenar as melhores aproximações equilibrando precisão e simplicidade, sendo particularmente útil na modelagem de sistemas reais que possam vir a ser implementados em *hardware* com limitações de memória e velocidade de processamento.

Assim, o AIC é calculado para cada ordem de ajuste com base no erro quadrático médio — do inglês, *Mean Squared Error* (MSE) — associado ao modelo racional obtido pelo *Vector Fitting*. Após o algoritmo ajustar o modelo para uma ordem específica, estima-se o MSE entre a resposta ajustada e os dados originais. Em seguida, utiliza-se a forma simplificada do AIC — adequada para problemas de aproximação — dada pela Equação (49), em que  $N_{data}$  representa o número total de pontos de frequência utilizados e  $k$  corresponde ao número de parâmetros livres do modelo para a ordem considerada (Amiri *et al.*, 2013). Dessa forma, o melhor modelo segundo o AIC é aquele que apresenta o menor valor dessa métrica.

$$AIC = N_{data} \ln(MSE) + 2k \quad (49)$$

Uma boa estimativa para o parâmetro  $k$  pode ser obtida por meio da Equação (50), em que  $N_p$  representa o número de polos do modelo e  $N_{in}$  e  $N_{out}$  correspondem ao número de entradas e saídas do sistema, respectivamente. Essa aproximação leva em consideração quatro parâmetros para cada polo complexo por entrada/saída, além de mais dois termos constantes<sup>5</sup>.

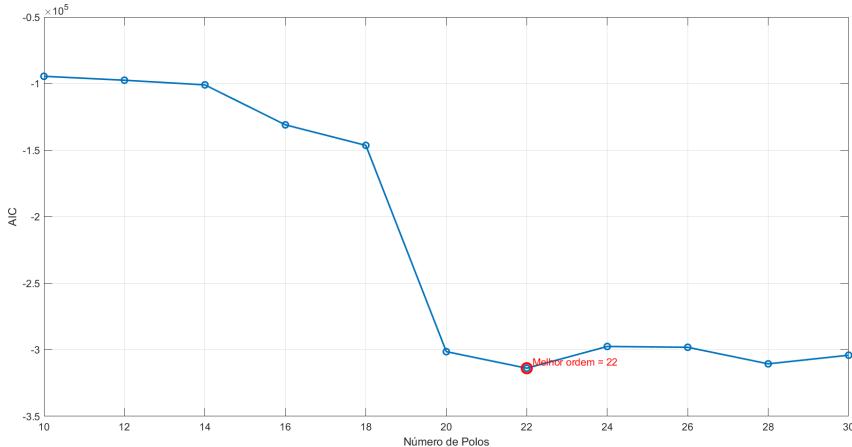
$$k = (4N_p + 2)N_{in}N_{out} \quad (50)$$

Portanto, o valor de AIC é calculado para diferentes ordens de aproximação, e os resultados correspondentes são apresentados na Figura 10. Verifica-se que a ordem 22 apresenta o menor valor de AIC, sendo, portanto, a mais adequada segundo esse critério. Esse resultado

<sup>5</sup> Os termos  $d$  e  $h$  da forma polo-resíduo, apresentados na Equação (21).

está em concordância com o comportamento observado na Figura 9, que também evidencia uma melhora significativa do ajuste nessa ordem.

**Figura 10 – Critério AIC em função da ordem de ajuste — Estudo de Caso 1.**



**Fonte:** Autoria própria.

Desse modo, realiza-se o ajuste dos dados sintéticos com 22 polos iniciais, o que é coerente com a quantidade de polos definidos na parte triangular superior da matriz de transferência, uma vez que o *Vector Fitting* emprega um conjunto comum de polos para o ajuste dos dados. Destaca-se que, em razão da natureza dos dados empregados neste caso, a ordem de grandeza do erro RMS é baixa, na faixa de  $10^{-14}$ .

O resultado do ajuste da magnitude da resposta em frequência, obtido após cinco iterações do algoritmo, é apresentado na Figura 11, em que ambos os eixos estão em escala logarítmica, a fim de facilitar a visualização dos erros de baixa magnitude envolvidos nesse tipo de ajuste sem ruído.

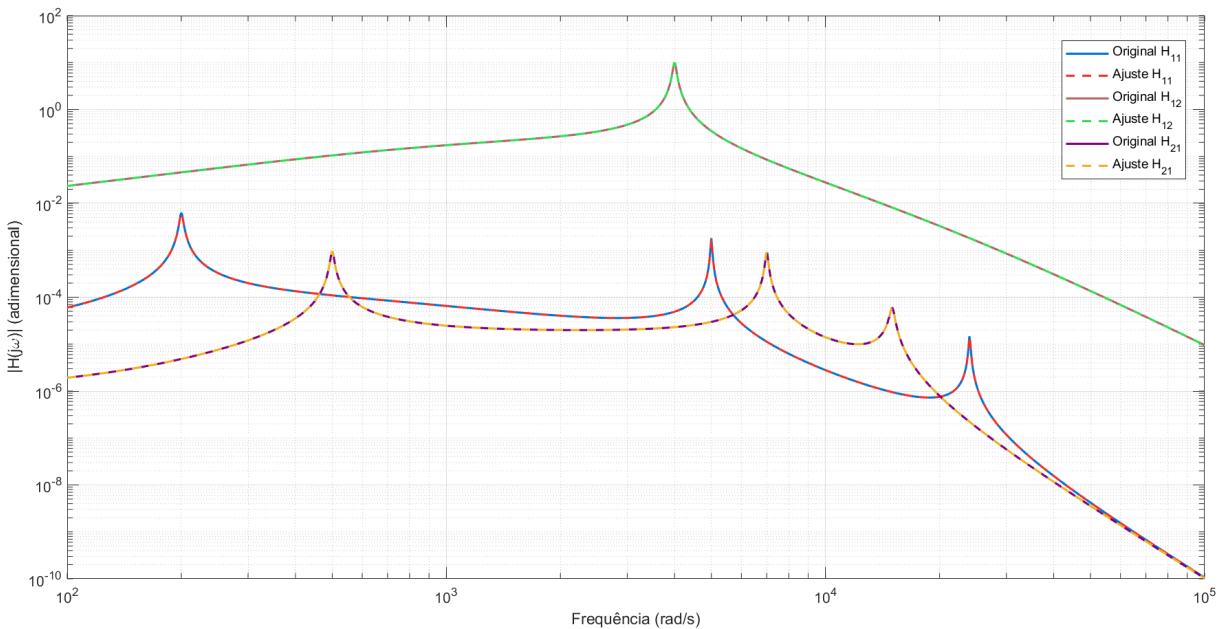
Outra maneira de quantificar a qualidade do ajuste é por meio do valor normalizado da raiz do erro quadrático médio — do inglês, *Normalized Root Mean Squared Error* (NRMSE) — cujo valor indica o nível com que o modelo resultante se aproxima dos dados medidos. Para o presente caso, o NRMSE calculado foi de  $2,324 \times 10^{-14}$ , o que demonstra que o erro relativo envolvido nesse tipo de ajuste é praticamente nulo ao longo de todo o espectro de frequência.

Por se tratar de um conjunto de dados sintético que não representa um sistema físico real, não são aplicados os critérios de validação descritos na Seção 3.1.

### 3.2.2 Estudo de Caso 2: Dados Reais Provenientes de Terceiros

Nesta seção desenvolve-se um estudo de caso, similar ao da Seção 3.2.1, desta vez utilizando dados reais de resposta em frequência provenientes de terceiros. Com esse estudo de caso pretende-se evidenciar as dificuldades associadas à identificação de sistemas a partir de dados com ruído, além de explorar as limitações do algoritmo empregado. Este estudo de caso também estabelece uma base prática para a aplicação da proposta de modelagem deste trabalho.

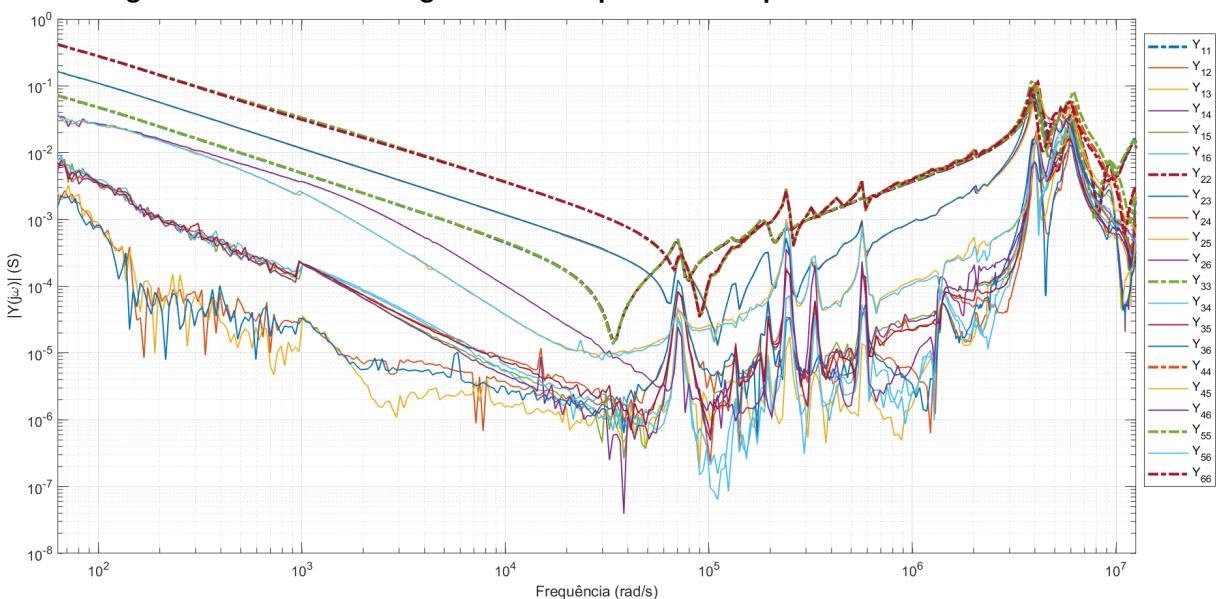
**Figura 11 – Curvas de magnitude do ajuste obtido — Estudo de Caso 1.**



**Fonte:** Autoria própria.

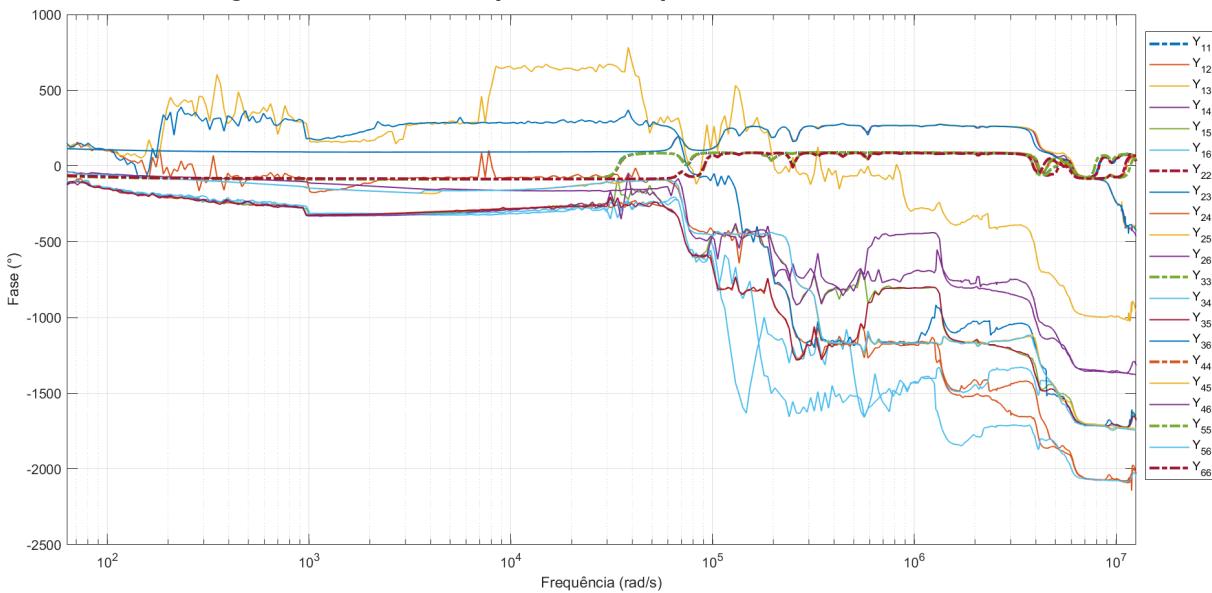
Sendo assim, os dados utilizados consistem em uma matriz de resposta em frequência de dimensões  $6 \times 6 \times 600$ , ou seja, correspondem a uma medição completa de um transformador trifásico, gerando um sistema do tipo MIMO com seis entradas e seis saídas, amostrado em 600 pontos de frequência distintos. Esse conjunto é composto por dados de admitância medidos do transformador, cujos valores são apresentados nas Figuras 12 e 13, que mostram a magnitude e a fase de cada elemento da matriz em função da frequência.

**Figura 12 – Curvas de magnitude da resposta em frequência — Estudo de Caso 2.**



**Fonte:** Autoria própria.

**Figura 13 – Fase da resposta em frequência — Estudo de Caso 2.**



**Fonte:** Autoria própria.

Os elementos da diagonal principal são representados nas linhas traço-ponto de espessura maior. É notável a sobreposição das curvas dos elementos simétricos da matriz indicando que resposta em frequência é praticamente simétrica em relação à diagonal principal, característica típica de sistemas elétricos. Além disso, observa-se um número elevado de picos de ressonância em comparação ao caso sintético, indicando que a dinâmica do sistema possui uma quantidade maior de modos oscilatórios e, consequentemente, de pares de polos complexos conjugados.

Também é importante observar que a ordem de grandeza da magnitude da admitância dos elementos da diagonal principal — admitâncias próprias dos enrolamentos do transformador — são consideravelmente superiores aos demais elementos. Não apenas isso, mas nota-se que entre as admitâncias da diagonal principal existem seis curvas sobrepostas, identificadas na Figura 12, referentes aos elementos  $Y_{14}$ ,  $Y_{25}$ ,  $Y_{36}$ ,  $Y_{41}$ ,  $Y_{52}$  e  $Y_{63}$ . Esses elementos possuem admitância de magnitude de mesma ordem dos elementos da diagonal principal, pois representam o acoplamento entre os enrolamentos primário e secundário da mesma fase do transformador, que naturalmente tendem a ser elevados, devido ao próprio funcionamento do equipamento.

Inicia-se, portanto, o ajuste dos dados desta seção, seguindo o procedimento de organização descrito no Algoritmo 4 e preservando os parâmetros do *Vector Fitting* definidos no Quadro 4. No que se refere aos polos iniciais, verificou-se que a distribuição linear não resulta em um ajuste satisfatório; assim, optou-se por uma distribuição logarítmica, gerada por código conforme apresentado no Algoritmo 5. Essa distribuição abrange a ampla faixa de frequências observada nas Figuras 12 e 13, que se estende, aproximadamente, de  $10^1$  a  $10^7$  rad/s.

Além disso, verifica-se que a utilização de um esquema de ponderação inversa do tipo forte, apresentada no Quadro 1, proporciona uma melhoria expressiva nos ajustes obtidos, abrangendo as variações de magnitude ao longo de toda a faixa de frequência.

**Algoritmo 5 – Definição dos polos iniciais distribuídos logaritmicamente.**


---

```

1: bet=logspace(log10(w(1)),log10(w(end)),Np/2);
2: poles = [];
3: for n = 1:length(bet)
4:   alf = -bet(n) * 1e-2;
5:   poles = [poles (alf - j * bet(n)) (alf + j * bet(n))];
6: end

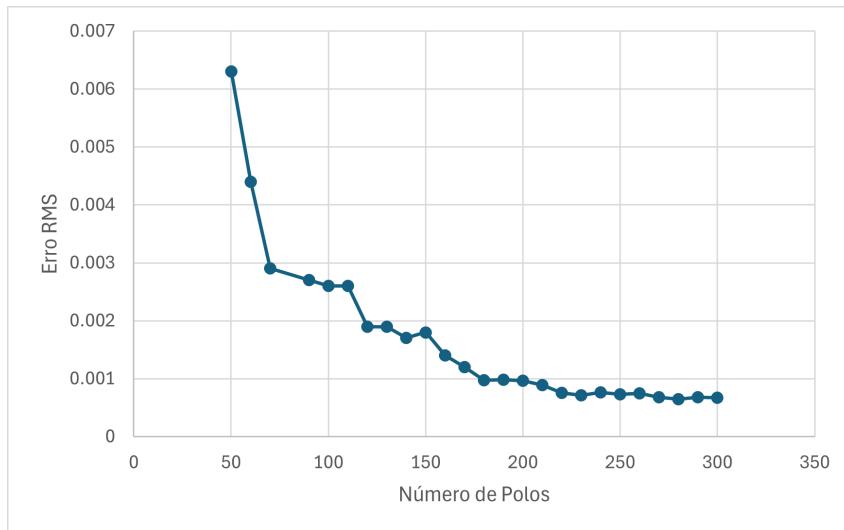
```

---

**Fonte:** Autoria própria.

Da mesma forma que na Seção 3.2.1, é realizada a verificação do erro RMS do modelo em função da ordem de ajuste. Os resultados são apresentados na Figura 14.

**Figura 14 – Erro RMS em função da ordem de ajuste — Estudo de Caso 2.**



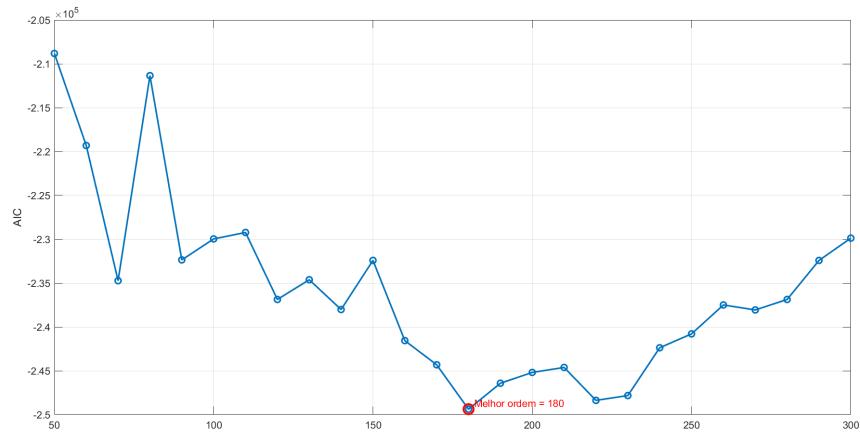
**Fonte:** Autoria própria.

Além disso, é possível empregar o AIC para determinar a quantidade de polos necessária para obter um ajuste adequado, evitando o aumento desnecessário da complexidade do modelo.

Sendo assim, além dos resultados observados na Figura 14, são calculados os valores de AIC para diferentes ordens de ajuste, permitindo determinar com maior segurança o número adequado de polos iniciais. Os resultados dessa avaliação são exibidos na Figura 15. Observa-se que o melhor ajuste, segundo o AIC, ocorre para 180 polos iniciais, resultado que se mostra consistente com o comportamento do erro RMS, o qual deixa de apresentar reduções significativas à medida que a ordem do modelo é aumentada.

Assim, realiza-se o ajuste destes dados, empregando 180 polos iniciais. Verifica-se empiricamente que o algoritmo do *Vector Fitting* tende a convergir em poucas iterações; portanto, para este caso, são adotadas 10 iterações do algoritmo, número que garante a estabilização do processo de ajuste. O resultado para a magnitude da resposta em frequência é apresentado na Figura 16. Observa-se a presença de pequenos desvios entre as curvas originais e ajustadas, especialmente nos elementos de baixa magnitude fora da diagonal principal, o que pode ser atribuído ao grande número de modos oscilatórios destes elementos. Contudo, nos elemen-

**Figura 15 – Critério AIC em função da ordem de ajuste — Estudo de Caso 2.**



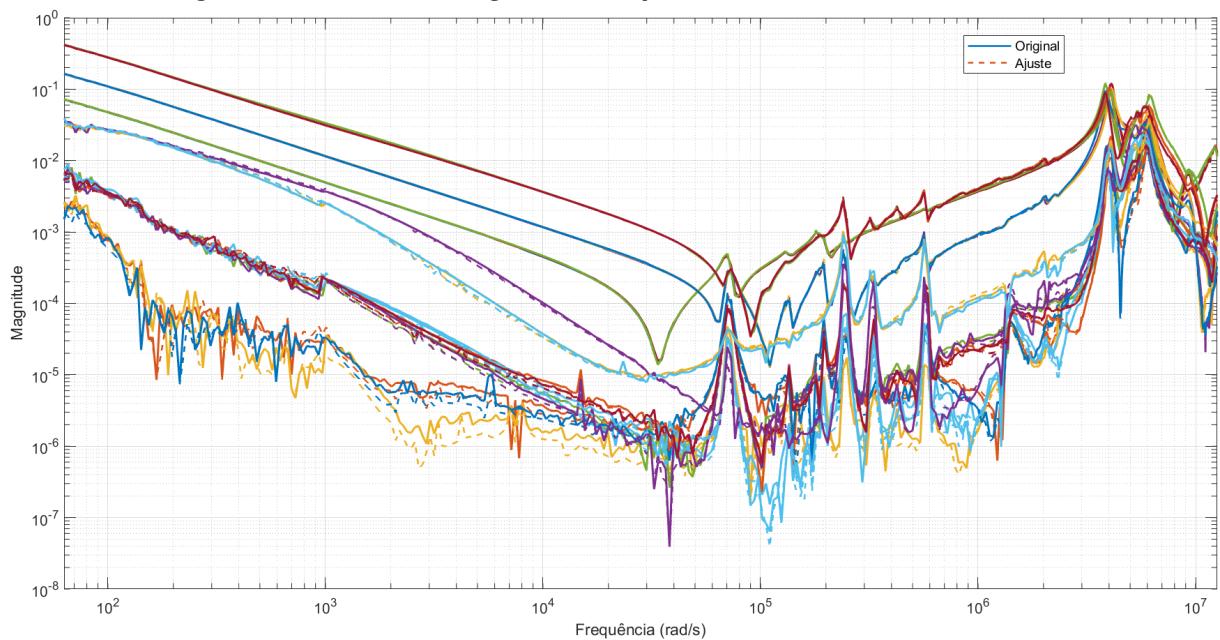
**Fonte:** Autoria própria.

tos de maior magnitude, tem-se um ajuste satisfatório ao longo de todas as frequências, com desvios mínimos.

Quantitativamente, a qualidade do ajuste também demonstrou-se satisfatória, com o NRMSE apresentando um valor de 0,0188. Esse valor demonstra que o erro relativo é reduzido, considerando o ajuste simultâneo de todos os elementos da matriz de resposta em frequência.

Diferentemente do caso com dados sintéticos, neste cenário, o ajuste mostra-se significativamente mais sensível à escolha do número de polos iniciais e o esquema de ponderação inversa forte faz-se necessário para melhorar a qualidade dos resultados.

**Figura 16 – Curvas de magnitude do ajuste obtido — Estudo de Caso 2.**

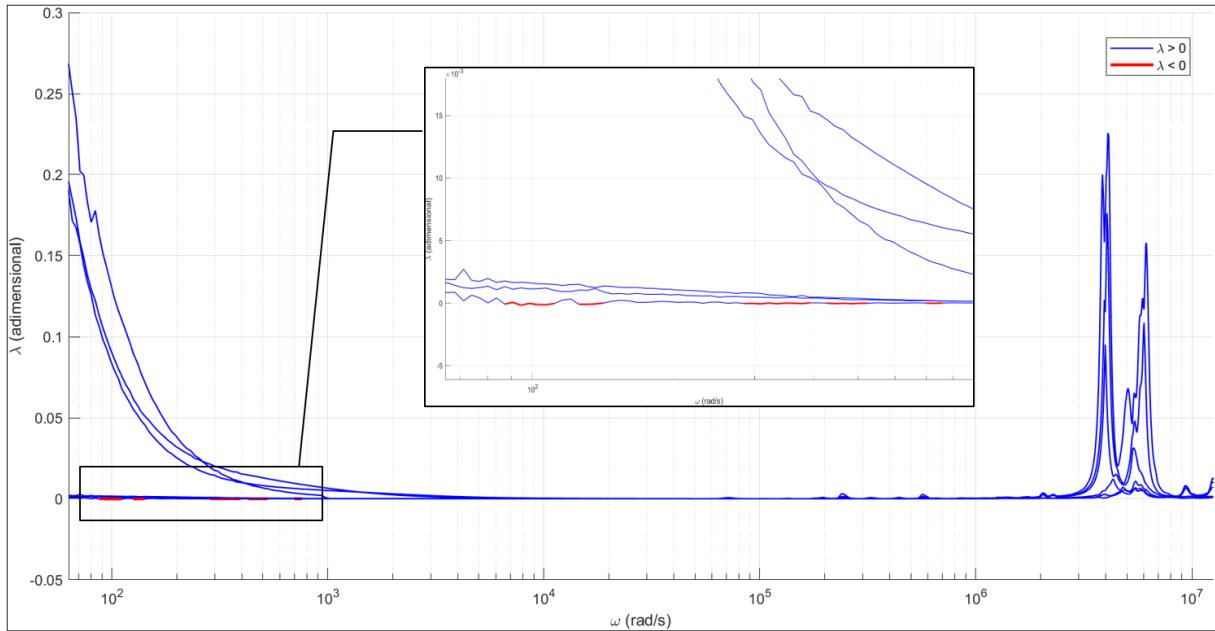


**Fonte:** Autoria própria.

Para este conjunto de dados, as Figuras 17 e 18 demonstram a validação de passividade efetuada. A matriz de resposta em frequência possui dimensões  $6 \times 6$  e, portanto, para cada

frequência, foram obtidos seis autovalores<sup>6</sup>. A Figura 17 exibe o gráfico dos autovalores calculados com base nos dados originais, enquanto a Figura 18 apresenta o gráfico dos autovalores calculados após o ajuste via *Vector Fitting*. Em ambas as figuras observa-se um traçado que destaca as faixas de frequência em que existem autovalores negativos. A Tabela 1 apresenta os valores mínimos de cada um dos autovalores durante toda a faixa de frequência amostrada.

**Figura 17 – Autovalores da condutância antes do ajuste via *Vector Fitting* — Estudo de Caso 2.**



**Fonte:** Autoria própria.

**Tabela 1 – Autovalores mínimos e respectivas frequências — Estudo de Caso 2.**

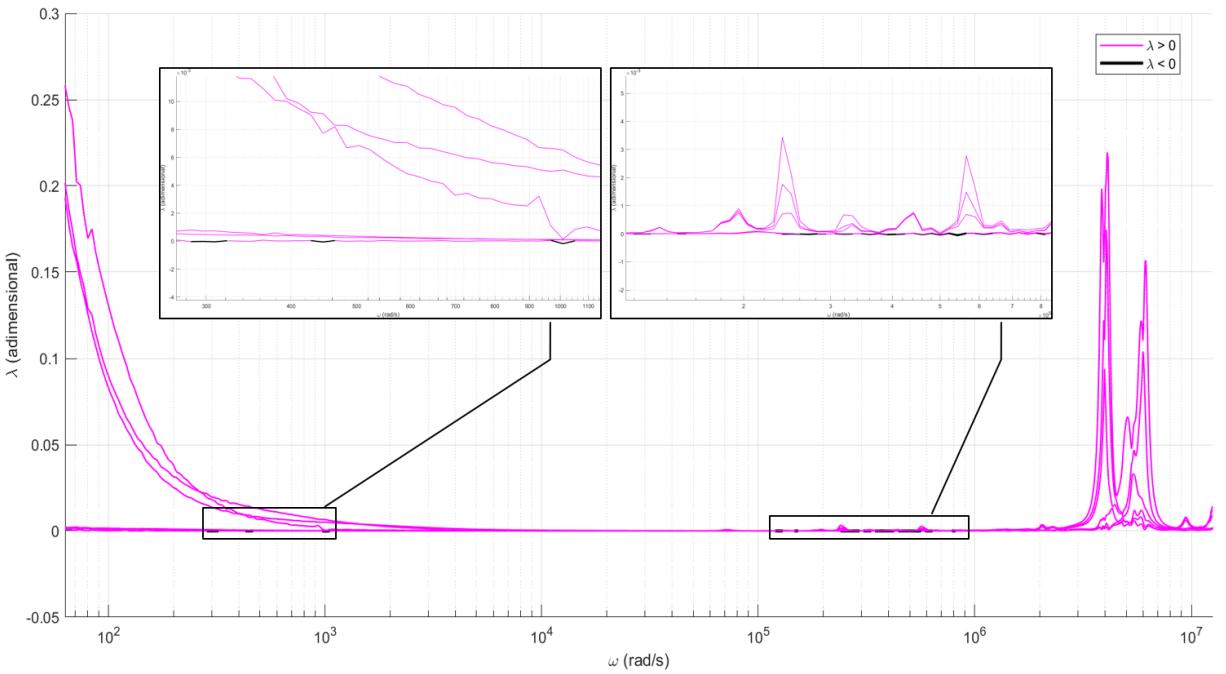
Dados	Autovalor mínimo ( $\lambda_{\min}$ )	Frequência (rad/s)
Medido 1	$-1,7951 \times 10^{-4}$	$9,45 \times 10^1$
Medido 2	$4,9600 \times 10^{-6}$	$4,31 \times 10^4$
Medido 3	$5,7638 \times 10^{-6}$	$2,98 \times 10^4$
Medido 4	$3,6196 \times 10^{-5}$	$1,15 \times 10^5$
Medido 5	$3,7071 \times 10^{-5}$	$1,15 \times 10^5$
Medido 6	$3,9067 \times 10^{-5}$	$1,15 \times 10^5$
Ajustado 1	$-5,8272 \times 10^{-5}$	$8,15 \times 10^5$
Ajustado 2	$-5,6394 \times 10^{-5}$	$3,75 \times 10^5$
Ajustado 3	$-1,0026 \times 10^{-5}$	$3,75 \times 10^5$
Ajustado 4	$-1,5527 \times 10^{-4}$	$7,11 \times 10^1$
Ajustado 5	$-1,8900 \times 10^{-5}$	$2,40 \times 10^5$
Ajustado 6	$-3,9156 \times 10^{-5}$	$2,40 \times 10^5$

**Fonte:** Autoria própria.

Percebe-se pela Tabela 1 a presença de valores negativos para o primeiro autovalor com base nos dados originais, e a presença de valores negativos em todos os autovalores após o ajuste, o que caracteriza, em teoria, um sistema não passivo.

<sup>6</sup> Autovalores da parte real da admitância — condutância,  $G$  —, conforme discutido na Seção 3.1.

**Figura 18 – Autovalores da condutância apó o ajuste via *Vector Fitting* — Estudo de Caso 2.**



**Fonte:** Autoria própria.

No entanto, para os autovalores calculados com base nos dados originais, os valores negativos podem ser ocasionados, principalmente, por imperfeições experimentais, como ruído nas medições, erros de calibração do VNA e pequenas incoerências numéricas na matriz obtida. Assim sendo, esses resultados não devem ser interpretados como uma não passividade física do transformador, mas desvios decorrentes do processo de aquisição e estimativa.

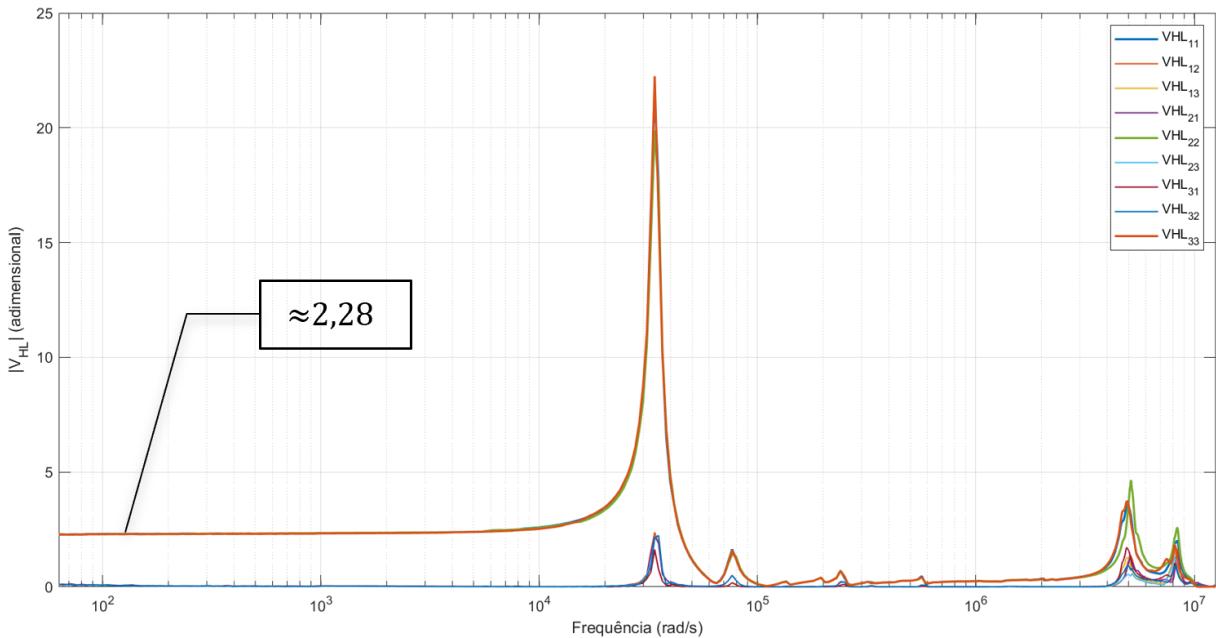
Por outro lado, após o ajuste, os valores negativos dos autovalores podem ser consequência do elevado número de polos, que tende a tornar o modelo não genérico e sobreajustado. Além disso, o processo de aproximação racional realizado pelo algoritmo *Vector Fitting* não impõe restrições explícitas de passividade durante a identificação. Para evitar tal adversidade, podem ser utilizadas técnicas de *passivity enforcement* para garantir consistência.

Com relação ao critério da transferência de tensão, utilizam-se as Equações (42) e (43) para determinar os elementos das matrizes de transferência de tensão  $V_{HL}$  e  $V_{LH}$  em cada ponto de frequência medido. Primeiramente, o cálculo é realizado com base nos dados experimentais originais. Os resultados obtidos para ambas matrizes são apresentados nas Figuras 19 e 20.

Conforme discutido na Seção 3.1, observa-se que os gráficos de transferência de tensão respeitam as condições esperadas de um transformador de potência, ou seja, apresentam comportamento estável até determinadas faixas de frequência e, apenas em valores mais elevados passam a refletir a influência de efeitos eletromagnéticos parasitas e acoplamentos indesejados.

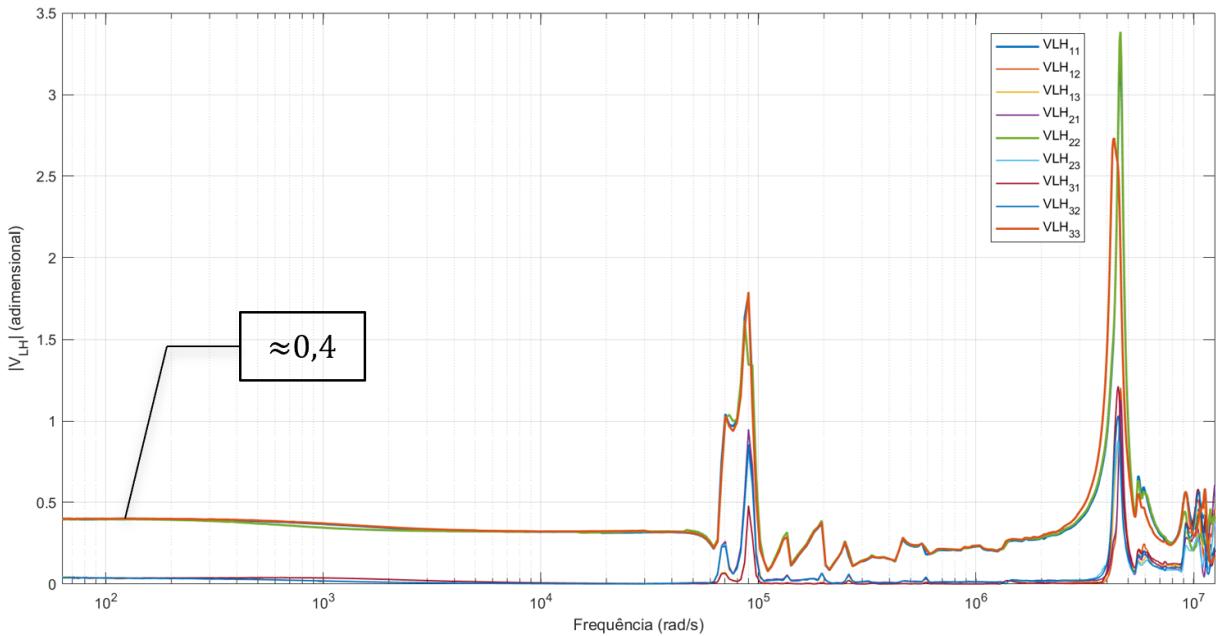
Além disso, nota-se que, para frequências de até, aproximadamente,  $5 \times 10^4$  rad/s, apenas os elementos da diagonal principal das matrizes  $V_{HL}$  e  $V_{LH}$  apresentam valores significativos, correspondendo à transferência de tensão entre terminais de uma mesma fase. Observa-se também que, nessa faixa de frequência, esses elementos são aproximadamente inversos entre

**Figura 19 – Transferência de tensão  $V_{HL}$  com dados originais — Estudo de Caso 2.**



**Fonte:** Autoria própria.

**Figura 20 – Transferência de tensão  $V_{LH}$  com dados originais — Estudo de Caso 2.**



**Fonte:** Autoria própria.

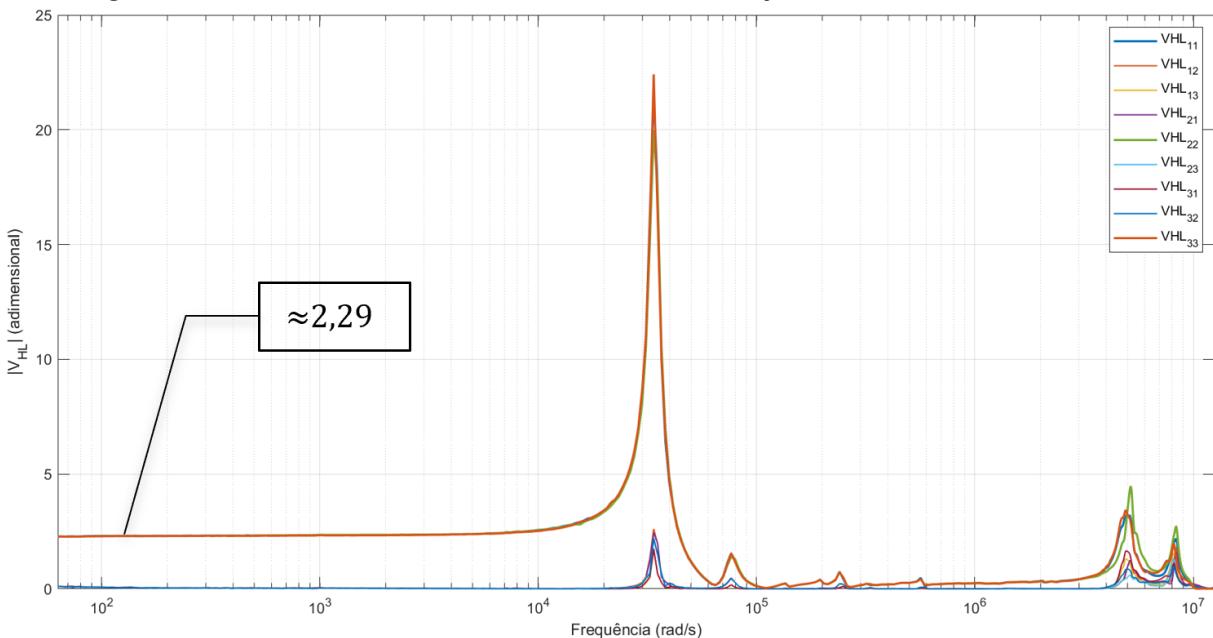
si, o que é coerente, já que representam, respectivamente, as transferências de tensão do lado de maior para o lado de menor tensão e o processo inverso.

Em ambas as Figuras 19 e 20, observam-se picos de magnitude bem definidos em frequências elevadas. Esses picos evidenciam a presença de ressonâncias no comportamento dinâmico do transformador, indicando que, durante surtos eletromagnéticos ou fenômenos transitórios rápidos, as componentes nessas frequências podem exercer influência significativa so-

bre os níveis de tensão nos terminais. Consequentemente, tais efeitos podem gerar sobretenções momentâneas e comprometer a integridade dielétrica do equipamento.

Assim, realiza-se a mesma análise para o conjunto de dados ajustados, isto é, para o modelo obtido via *Vector Fitting*. Com isso, torna-se possível validar o modelo segundo o critério da transferência de tensão e, adicionalmente, identificar eventuais variações introduzidas pelo processo de ajuste. Os resultados dos cálculos das matrizes de transferência de tensão  $V_{HL}$  e  $V_{LH}$  referentes ao modelo obtido são apresentados nas Figuras 21 e 22.

**Figura 21 – Transferência de tensão  $V_{HL}$  com dados ajustados — Estudo de Caso 2.**

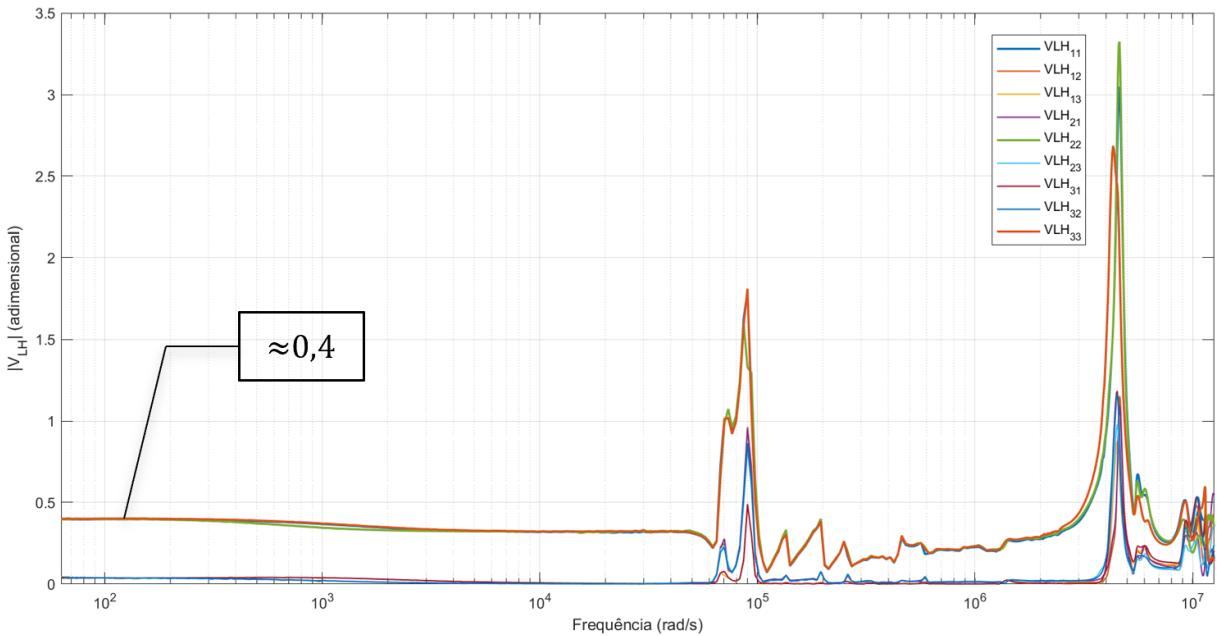


**Fonte:** Autoria própria.

Comparando-se as Figuras 21 e 22 com as Figuras 19 e 20 observa-se que não ocorreram alterações notáveis no comportamento da transferência de tensão. Esse resultado indica que o modelo obtido preservou adequadamente as características eletromagnéticas originais do transformador. Sendo assim, o ajuste realizado pode ser considerado validado com base no critério da transferência de tensão.

Por fim, o último critério de validação realizado é a concordância dos dados medidos e ajustados com o comportamento em frequência do modelo teórico nominal para 60 Hz. Conforme explicado na Seção 3.1, a resposta em frequência do modelo nominal de 60 Hz traduz-se em uma reta com inclinação de  $-20$  dB por década, originada pela expressão  $\frac{1}{j\omega L}$ . Sendo assim, tomando como base a Figura 16, são sobrepostas duas retas, originadas pelas respostas em frequência das expressões  $\frac{1}{j0,2193\omega}$  e  $\frac{1}{j0,03125\omega}$  e apresentadas na Figura 23. Nesta figura, observam-se os dados medidos e ajustados dos elementos  $Y_{11}$  e  $Y_{44}$ , correspondentes às admitâncias próprias dos enrolamentos dos lados de maior e menor tensão de uma mesma fase do transformador. Destaca-se que as retas foram definidas de modo a coincidir com o comportamento nominal do transformador em baixas freqüências, o que confirma a coerência dos

**Figura 22 – Transferência de tensão  $V_{LH}$  com dados ajustados — Estudo de Caso 2.**

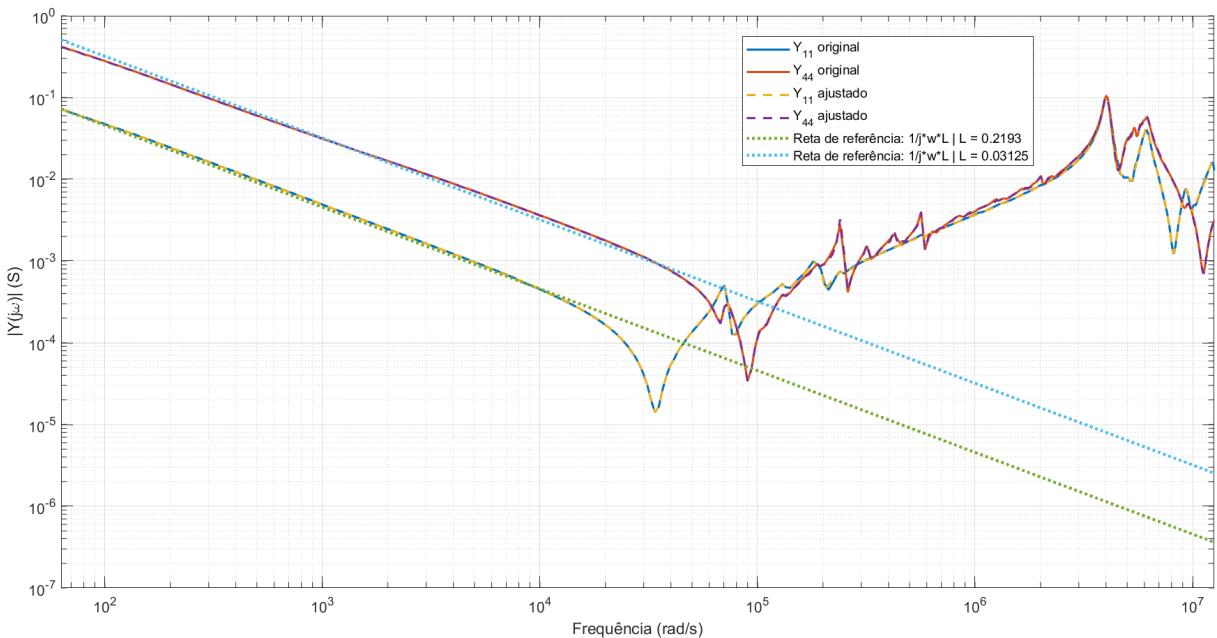


**Fonte:** Autoria própria.

dados medidos e ajustados. A partir de, aproximadamente,  $2 \times 10^4$  rad/s, o comportamento real do equipamento passa a divergir daquele previsto pelo modelo teórico nominal.

Com base nos coeficientes definidos para a expressão originária das retas, conclui-se que as indutâncias dos enrolamentos de maior e menor tensão são, respectivamente, 0,2193 H e 0,03125 H.

**Figura 23 – Curvas de aderência ao modelo teórico — Estudo de Caso 2.**



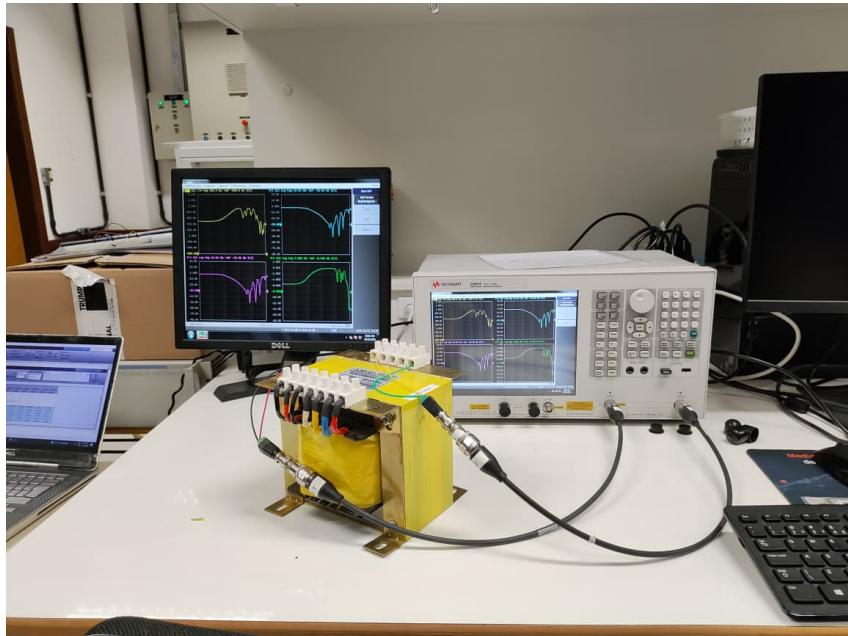
**Fonte:** Autoria própria.

### 3.2.3 Estudo de Caso 3: Dados Experimentais

Após a execução do método proposto utilizando dados sintéticos e dados reais de referência, passa-se agora ao estudo de caso com dados experimentais coletados pelos autores deste TCC. Com esses dados, busca-se validar o método de identificação no domínio da frequência desde a etapa de coleta de dados, até o ajuste racional via algoritmo *Vector Fitting*.

Portanto, a coleta consistiu na medição dos parâmetros de espalhamento de um transformador monofásico de ensaio, com potência nominal de 2.000 VA e relação de tensões de 400/200 V, utilizando um VNA, conforme apresentado na Seção 2.7. A medição foi realizada nas dependências da Universidade Federal do Paraná (UFPR) com equipamentos disponibilizados pela própria instituição. A Figura 24 apresenta o arranjo experimental empregado na coleta dos dados, incluindo o transformador, o VNA e cabos de medição, enquanto a Figura 25 apresenta mais detalhadamente o modelo do VNA utilizado, da fabricante Keysight.

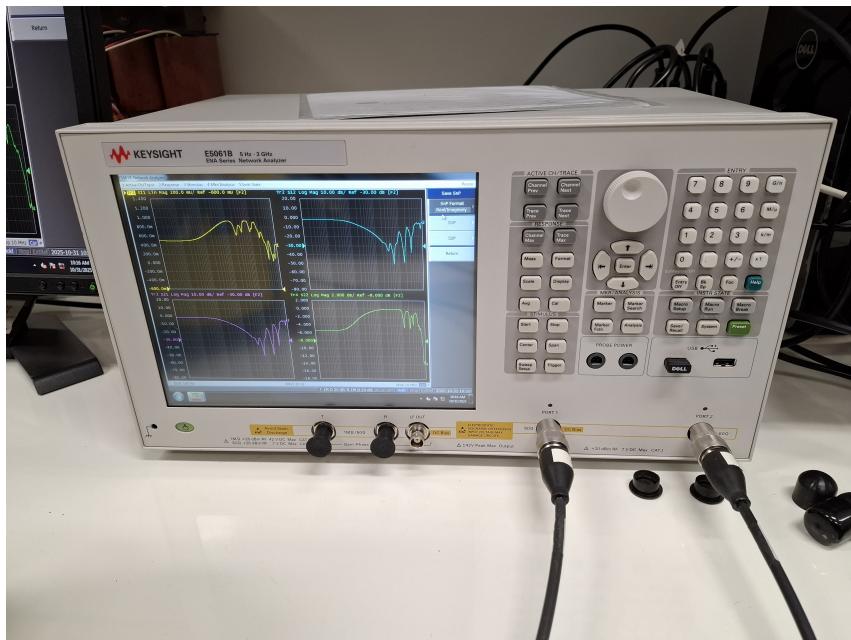
**Figura 24 – Arranjo experimental utilizado para a coleta de dados.**



**Fonte:** Autoria própria.

O Analisador de Redes Vetorial Keysight E5061B ENA, disponibilizado pela UFPR, trata-se de um equipamento de duas portas, cuja faixa operacional pode abranger desde 5 Hz até 3 GHz, dependendo das opções instaladas, permitindo a medição de parâmetros de espalhamento com elevada precisão. O instrumento apresenta ainda faixa dinâmica típica de aproximadamente 120 dB e potência máxima de saída em torno de +10 dBm, características que o tornam adequado para a análise do comportamento eletromagnético de transformadores. Assim, sua utilização neste trabalho assegura a confiabilidade das medições experimentais, sobretudo por possibilitar a avaliação detalhada da resposta em frequência do transformador de ensaio, incluindo ressonâncias, variações de impedância e demais fenômenos pertinentes ao processo de identificação. As especificações técnicas aqui descritas foram obtidas a partir do *datasheet* oficial da fabricante (Keysight Technologies, 2025).

**Figura 25 – VNA utilizado na medição dos dados.**



**Fonte:** Autoria própria.

Após a coleta, os dados são importados em ambiente computacional do MATLAB® e organizados em uma matriz  $2 \times 2$  de resposta em frequência, conforme o trecho de código apresentado no Algoritmo 6. Nesse código, MEDICAO\_UFPR.S2P é o nome do arquivo no qual os dados estão armazenados, enquanto S<sub>jw</sub> é a variável que contém os dados já estruturados no formato adequado para o processamento.

**Algoritmo 6 – Código para organizar os dados coletados em matriz de resposta em frequência.**

---

```

1: Smed = sparameters('MEDICAO_UFPR.S2P');
2: w = Smed.Frequencies*2*pi;
3: s = 1i*w;
4: Sjw_id = idfrd(Smed.Parameters, w, 0);
5: Sjw = Sjw_id.ResponseData;
```

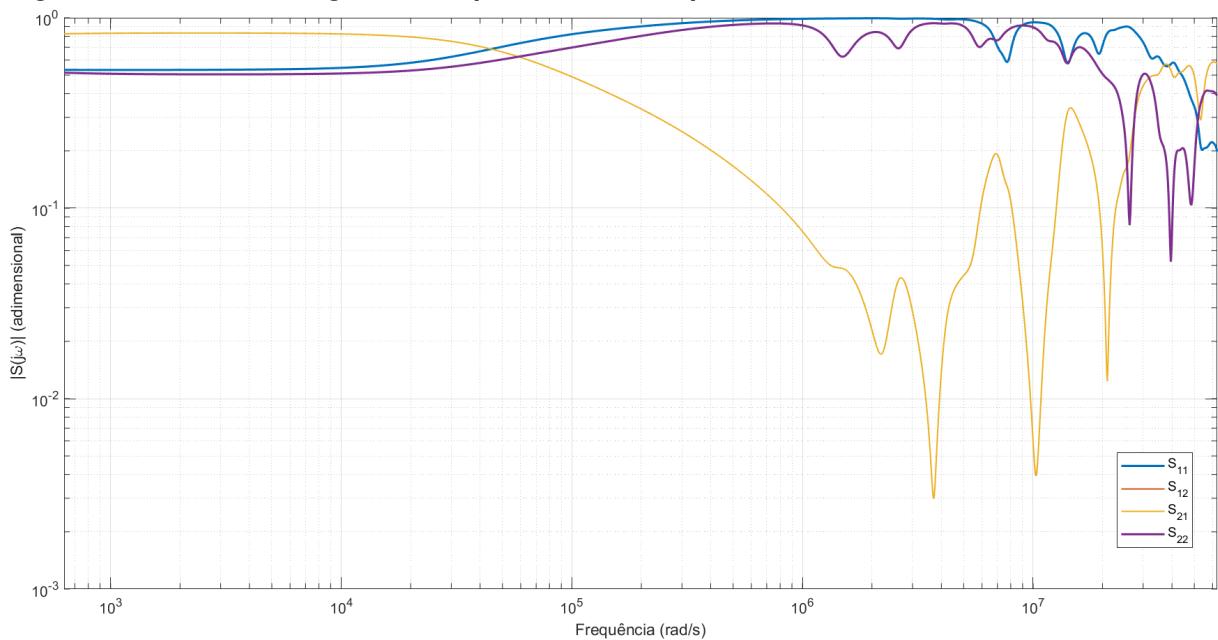
---

**Fonte:** Autoria própria.

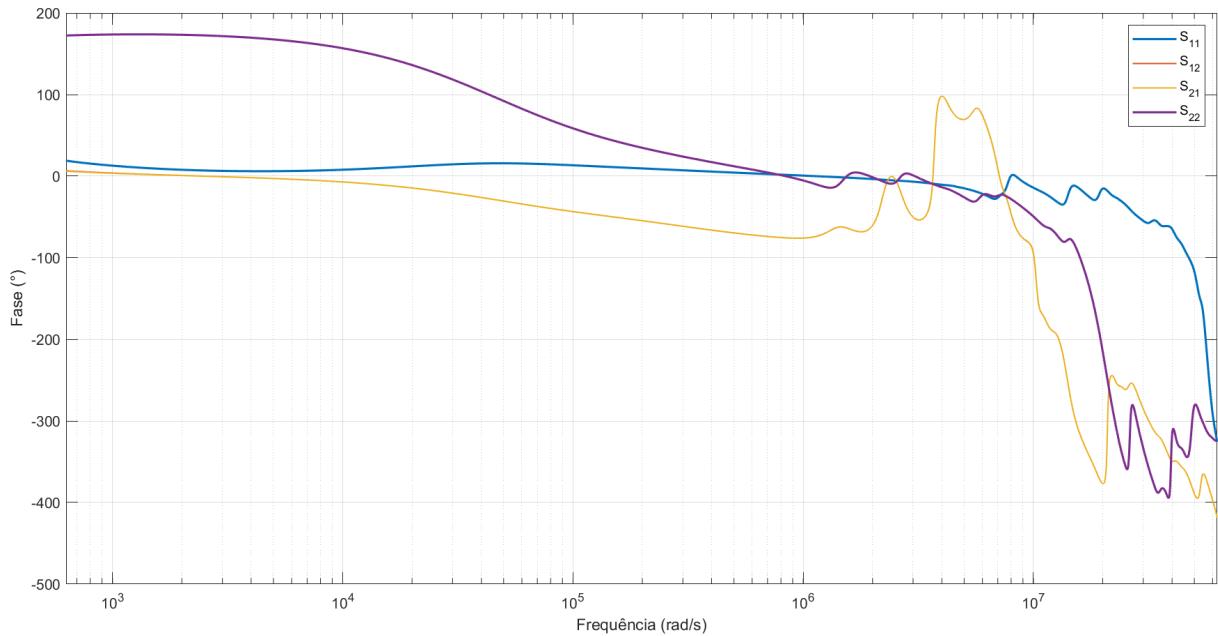
Os dados de resposta em frequência, no formato de parâmetros de espalhamento, podem ser visualizados nas Figuras 26 e 27, que apresentam, respectivamente, as magnitudes e os ângulos de fase dos elementos da matriz  $S(j\omega)$  obtida experimentalmente para todos os pontos de frequência medidos.

Para realizar as análises apresentadas neste trabalho, é necessário converter a matriz de resposta em frequência, inicialmente expressa em parâmetros de espalhamento, para parâmetros de admitância. Conforme descrito na Seção 2.2, é possível realizar essa conversão através da Equação (17). Assim, a resposta em frequência em termos de admitância é apresentada nas Figuras 28 e 29, que exibem, respectivamente, a magnitude e o ângulo de fase dos dados.

Observa-se, na Figura 28, que a curva de magnitude da resposta em frequência apresenta o comportamento típico esperado de um transformador, em concordância com os demais

**Figura 26 – Curvas de magnitude em parâmetros de espalhamento medidos — Estudo de Caso 3.**

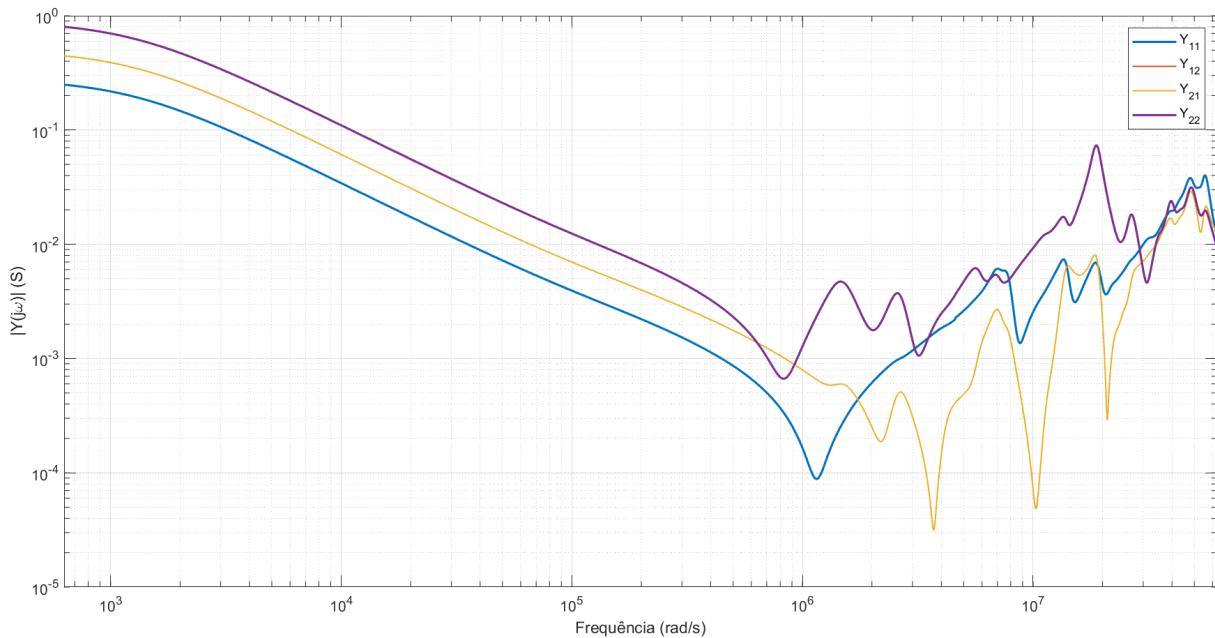
**Fonte:** Autoria própria.

**Figura 27 – Fase dos parâmetros de espalhamento medidos — Estudo de Caso 3.**

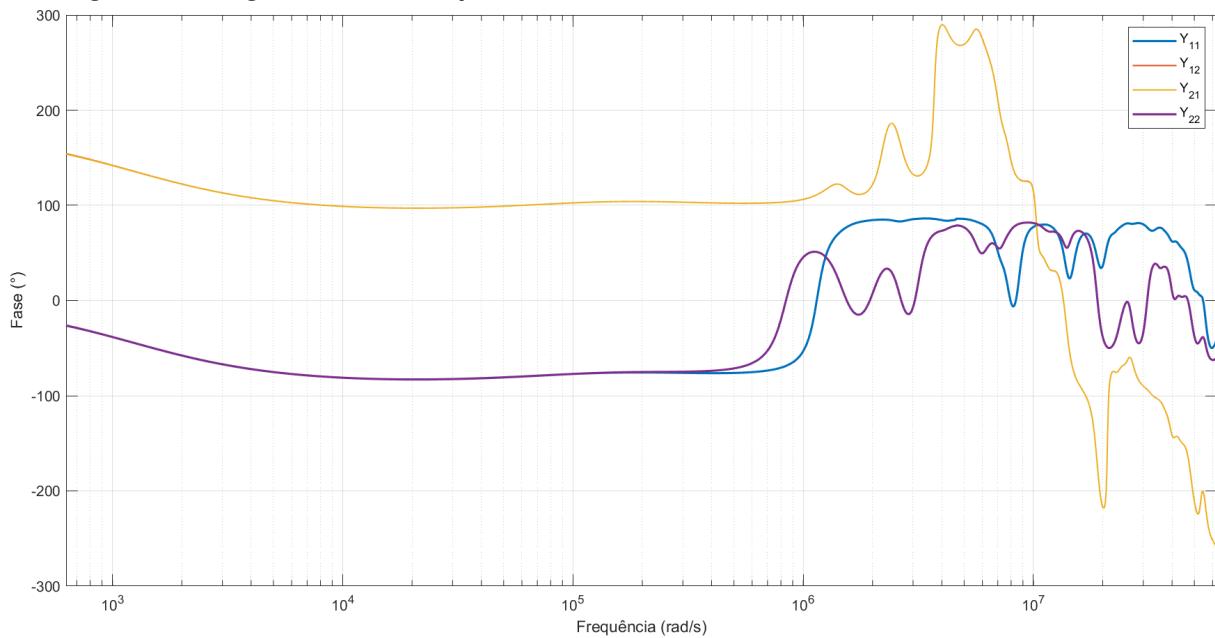
**Fonte:** Autoria própria.

estudos de caso realizados. Por se tratar de um transformador monofásico, identificam-se duas curvas correspondentes às admitâncias próprias dos enrolamentos de cada lado do transformador, e outras duas, praticamente sobrepostas, associadas à admitância de acoplamento entre os lados. Na Figura 28, a linha roxa representa a admitância própria do enrolamento de menor tensão, enquanto a linha azul corresponde ao enrolamento de maior tensão.

Para o ajuste dos dados experimentais por meio do algoritmo *Vector Fitting*, empregam-se os mesmos parâmetros previamente validados no estudo de caso anterior com dados reais.

**Figura 28 – Curvas de magnitude dos parâmetros de admitância medidos — Estudo de Caso 3.**

**Fonte:** Autoria própria.

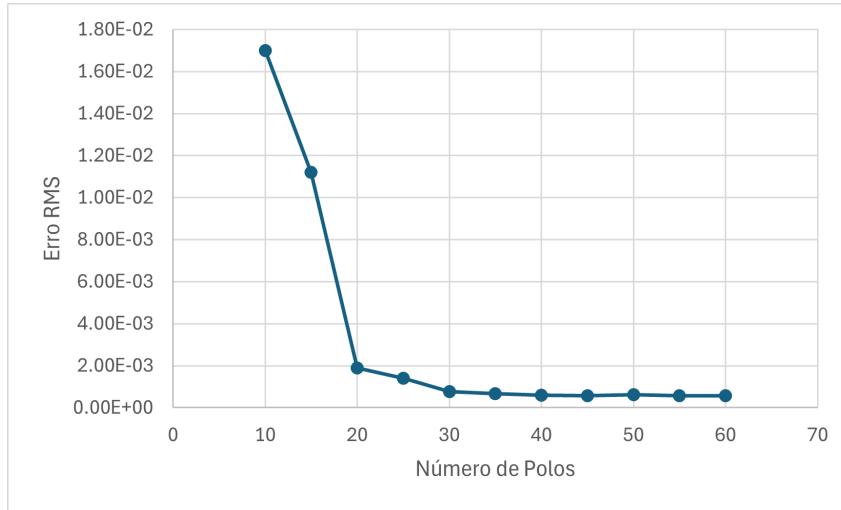
**Figura 29 – Ângulo de fase dos parâmetros de admitância medidos — Estudo de Caso 3.**

**Fonte:** Autoria própria.

A escolha da ordem de ajuste baseia-se nas Figura 30 e 31, que apresentam, respectivamente, o comportamento do erro RMS e do critério AIC, em função do número de polos iniciais. Observa-se que, a partir de 20 polos iniciais, o erro RMS deixa de apresentar melhorias significativas, indicando que aumentos adicionais na ordem pouco contribuem para a precisão do ajuste. Entretanto, o critério AIC — ao incorporar tanto a qualidade do ajuste quanto a complexidade estatística do modelo — aponta um valor adequado de polos iniciais maior. Assim, a escolha entre 20 e 45 polos depende do compromisso desejado entre simplicidade do mo-

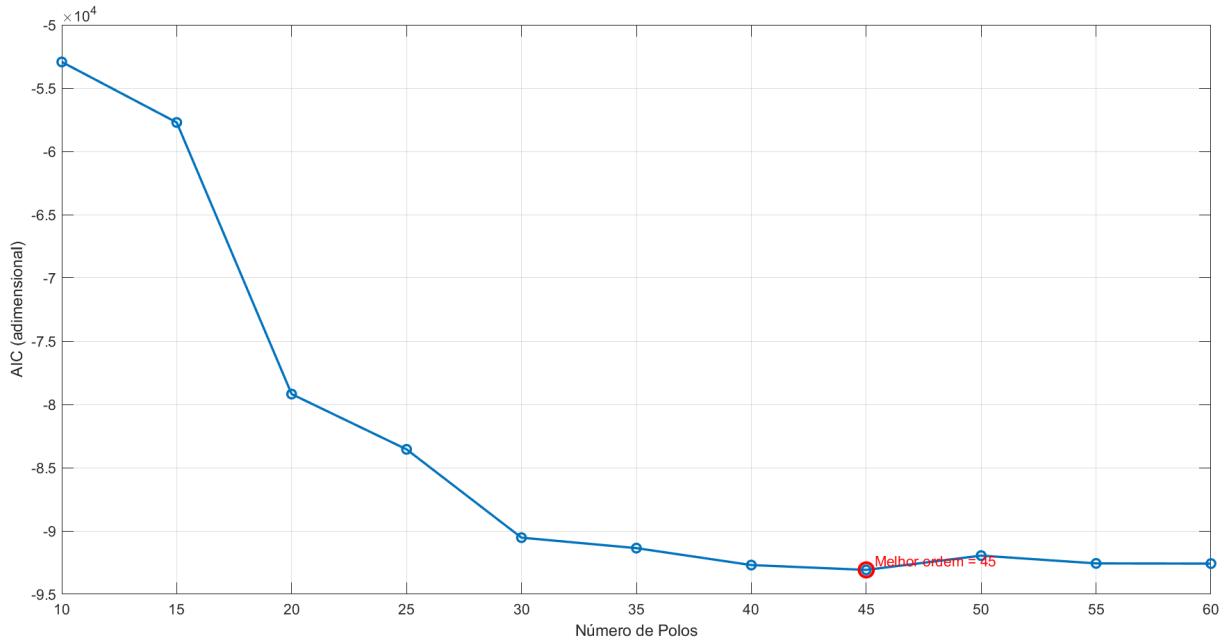
delo, fidelidade estatística e generalidade do modelo, buscando mitigar incertezas numéricas e sobreajustes.

**Figura 30 – Erro RMS em função da ordem de ajuste — Estudo de Caso 3.**



**Fonte:** Autoria própria.

**Figura 31 – Critério AIC em função da ordem de ajuste — Estudo de Caso 3.**

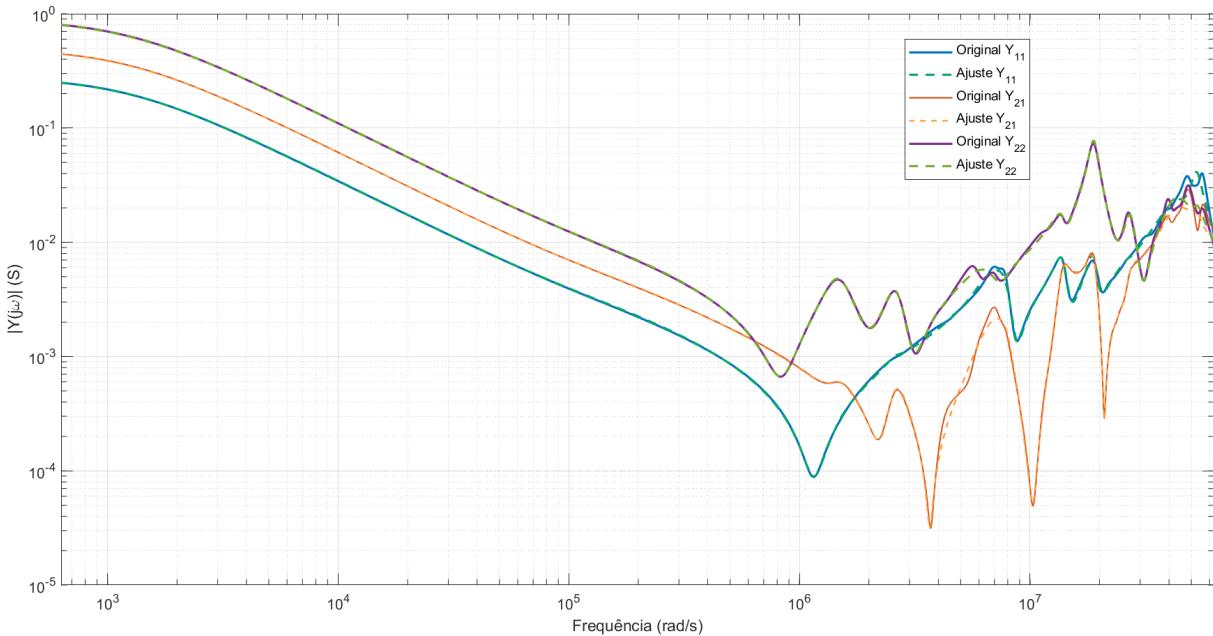


**Fonte:** Autoria própria.

Sabendo que o aumento do número de polos iniciais pode introduzir polos redundantes sem impacto significativo na qualidade do ajuste e, tendo em vista que as análises apresentadas nas figuras correspondentes mostram que, a partir de determinado ponto, o acréscimo de polos não proporciona ganhos relevantes, o valor de 20 polos iniciais representa, simultaneamente, um baixo valor de erro RMS e AIC. Assim, optou-se por realizar o ajuste do modelo utilizando o algoritmo *Vector Fitting* com 20 polos iniciais e 10 iterações. Os resultados, apresentados na Figura 32, evidenciam a boa qualidade do ajuste, visto que a função ajustada apresenta elevada

sobreposição com a curva experimental de magnitude da admitância ao longo de praticamente toda a faixa de frequências. Ademais, o valor de NRMSE obtido, igual a 0,0096, reforça a adequação do modelo ajustado.

**Figura 32 – Curvas de magnitude do ajuste obtido — Estudo de Caso 3.**

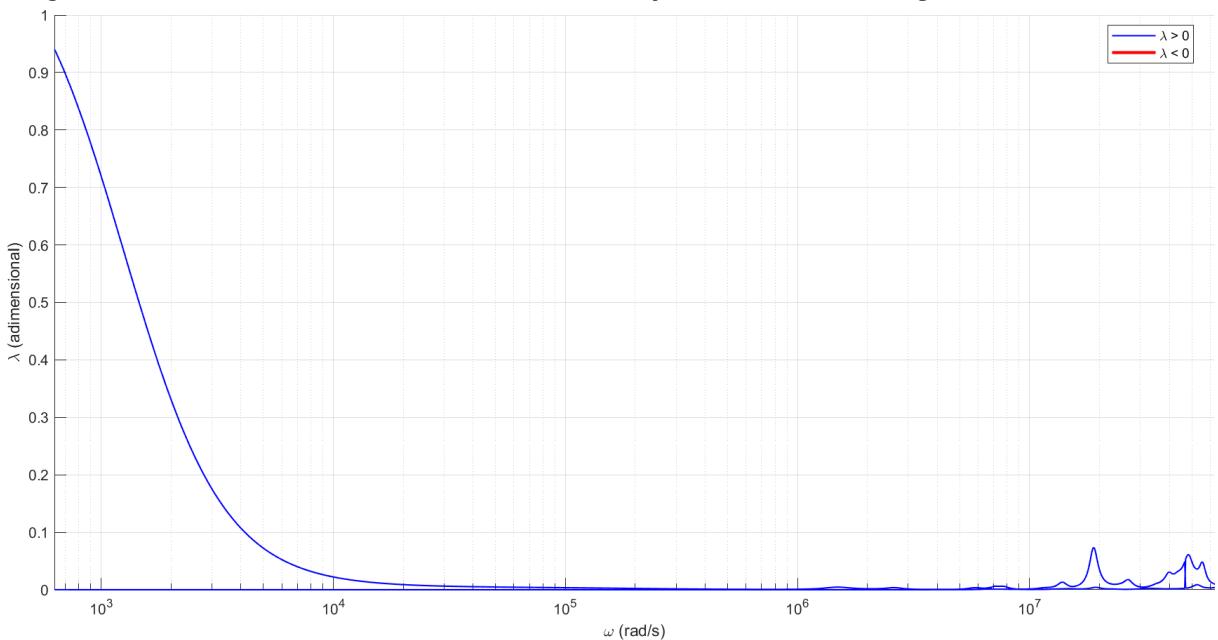


**Fonte:** Autoria própria.

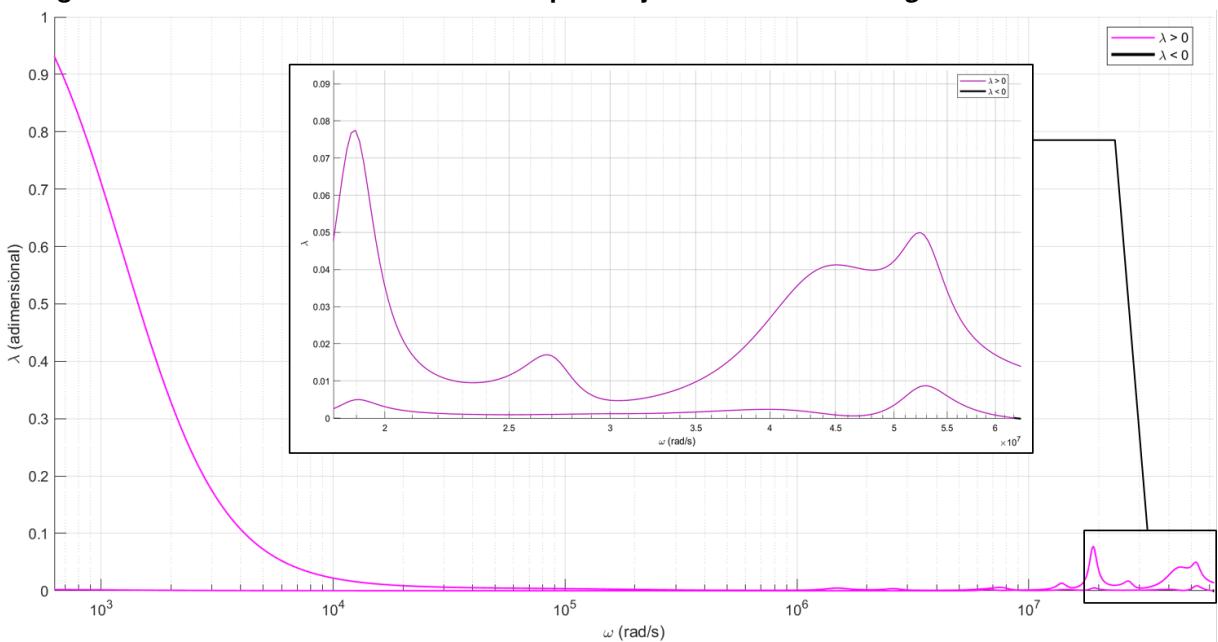
Após o ajuste, realiza-se a análise dos critérios de validação referentes a este conjunto de dados. As Figuras 33 e 34 apresentam a validação de passividade realizada. Como a matriz de resposta em frequência possui dimensão  $2 \times 2$ , são obtidos dois autovalores da matriz de condutância para cada frequência. Na Figura 33 são exibidos os autovalores calculados com base nos dados medidos, enquanto na Figura 34 são mostrados os autovalores após o ajuste via *Vector Fitting*. Além disso, a Tabela 2 revela os valores mínimos de cada autovalor durante toda a faixa de frequências amostrada.

Observa-se que, em altas frequências, surgem autovalores negativos após o ajuste, como pode ser verificado a partir do valor mínimo do segundo autovalor calculado para os dados ajustados, conforme a Tabela 2. Esse comportamento está possivelmente relacionado à ausência da aplicação de métodos de *passivity enforcement*, uma vez que o algoritmo de *Vector Fitting* não garante, por si só, a preservação da passividade do modelo ajustado. Assim, pequenas discrepâncias numéricas ou de ajuste podem resultar em não passividade nas frequências mais elevadas.

Em seguida, é aplicado o critério de validação por meio da análise de transferência de tensão, considerando tanto os dados experimentais originais quanto os dados obtidos após o ajuste. As Figuras 35 e 36 apresentam, respectivamente, as curvas de transferência de tensão obtidas a partir dos dados originais e ajustados. Observa-se que, em ambas as figuras,  $V_{12}$  representa a transferência de tensão do lado de maior tensão para o de menor tensão, enquanto  $V_{21}$  corresponde ao sentido oposto.

**Figura 33 – Autovalores da condutância antes do ajuste via *Vector Fitting* — Estudo de Caso 3.**

**Fonte:** Autoria própria.

**Figura 34 – Autovalores da condutância após o ajuste via *Vector Fitting* — Estudo de Caso 3.**

**Fonte:** Autoria própria.

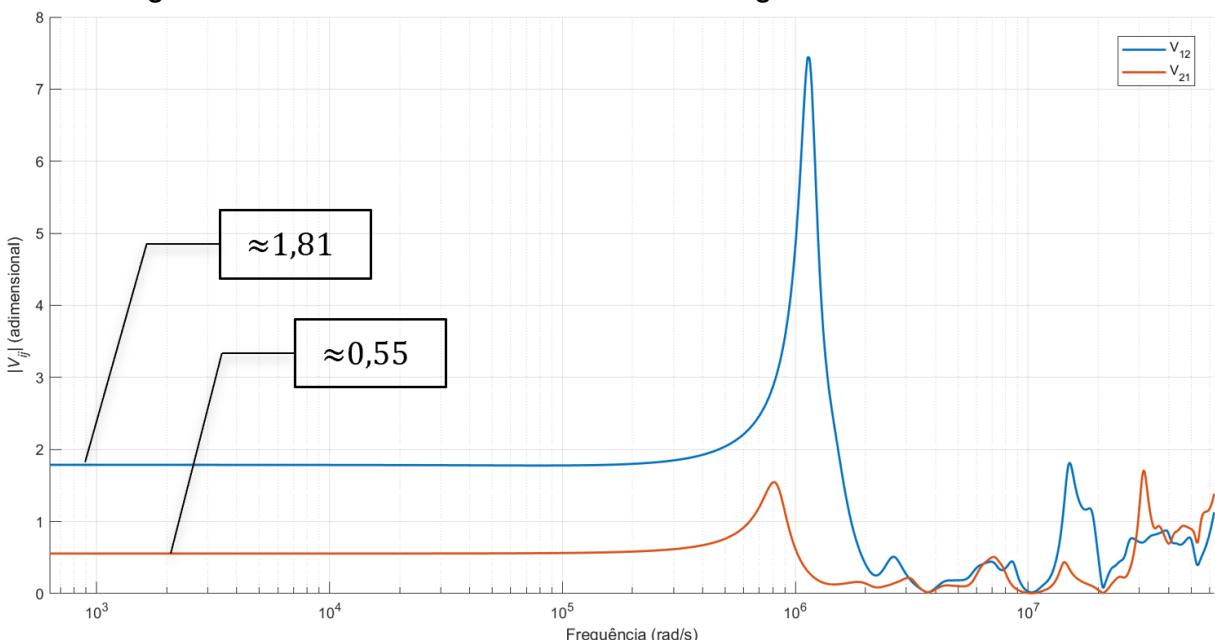
Cabe destacar que o comportamento observado na transferência de tensão é característico de transformadores, mantendo-se praticamente constante nas faixas mais baixas de frequência, com valores coerentes com os dados de placa do equipamento, e inversos entre si. Além disso, observa-se em ambas as curvas a presença de um pico acentuado em torno de  $10^6$  rad/s, o que indica uma ressonância associada às características eletromagnéticas e construtivas do transformador.

**Tabela 2 – Autovalores mínimos e respectivas frequências — Estudo de Caso 3.**

Dados	Autovalor mínimo ( $\lambda_{\min}$ )	Frequência (rad/s)
Medido 1	$1,4327 \times 10^{-5}$	$3,8324384 \times 10^5$
Medido 2	$6,6626 \times 10^{-4}$	$3,69895202 \times 10^6$
Ajustado 1	$6,3510 \times 10^{-5}$	$2,43677206 \times 10^6$
Ajustado 2	$-5,9672 \times 10^{-4}$	$6,283185307 \times 10^7$

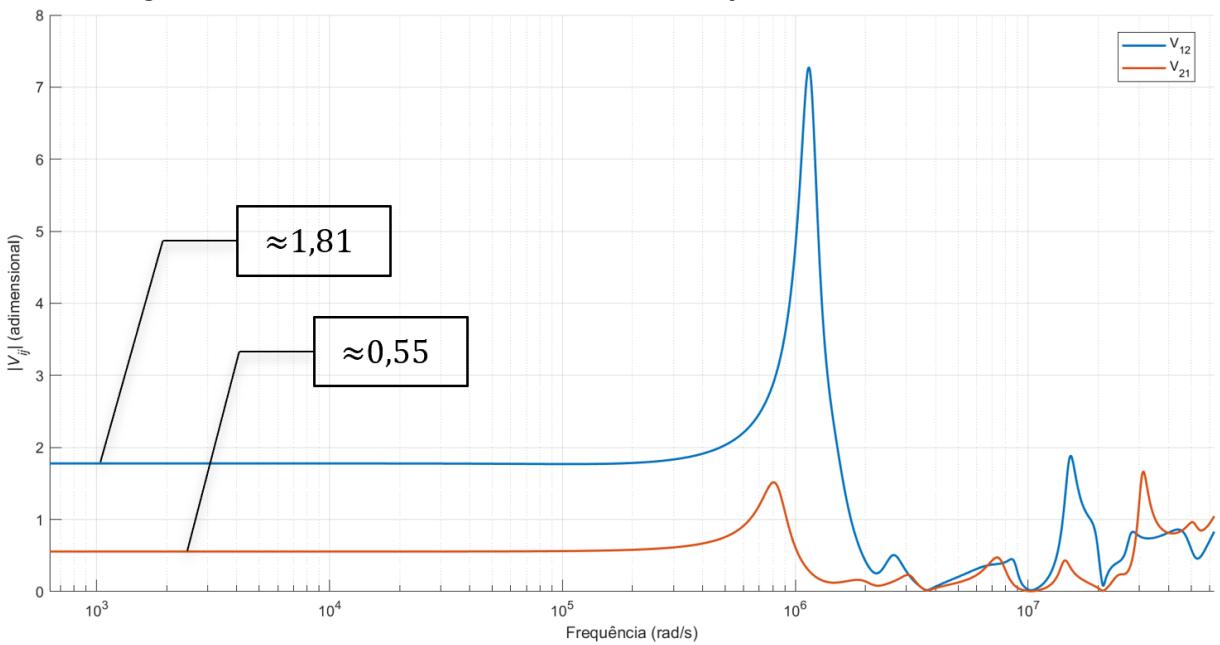
**Fonte:** Autoria própria.

Não se observam diferenças significativas entre as curvas exibidas nas Figuras 35 e 36, evidenciando que o processo de ajuste preservou adequadamente as características de transferência de tensão do sistema. Dessa forma, tanto os dados experimentais originais quanto aqueles obtidos a partir do modelo ajustado mostraram-se coerentes com o critério de validação adotado.

**Figura 35 – Transferência de tensão com dados originais — Estudo de Caso 3.****Fonte:** Autoria própria.

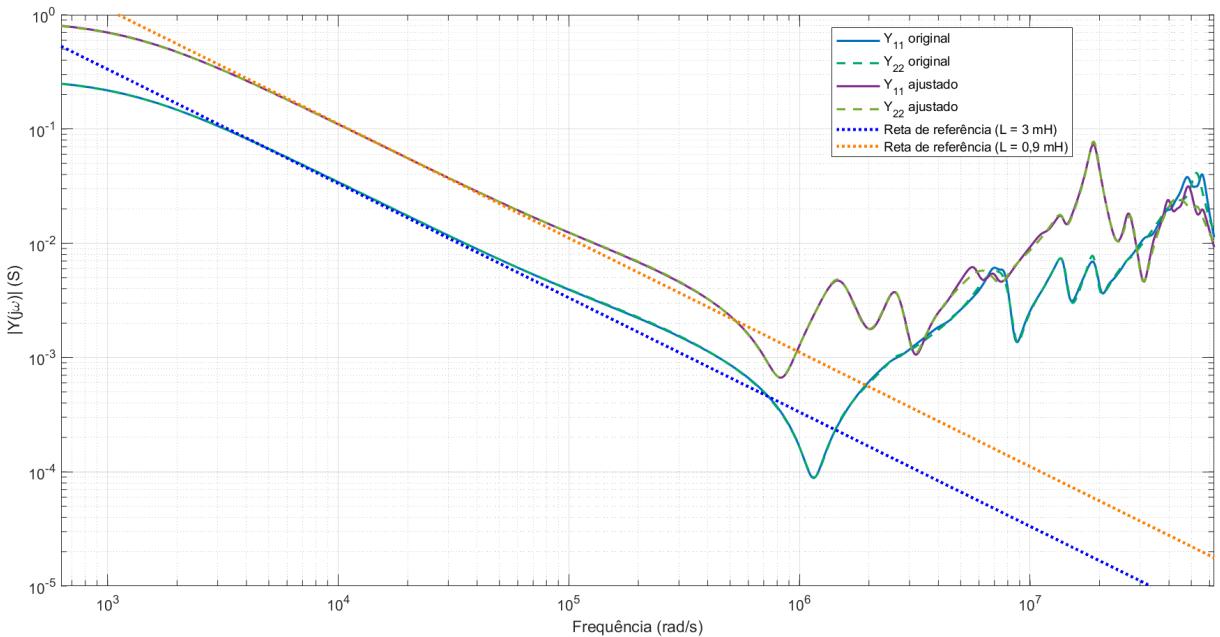
Para finalizar, é efetuada a validação por meio do critério de aderência ao modelo teórico. As curvas originais e ajustadas dos elementos  $Y_{11}$  e  $Y_{22}$ , correspondentes, respectivamente, às admitâncias próprias dos enrolamentos de maior e de menor tensão, são exibidas na Figura 37. Além das curvas, são apresentadas as retas de referência associadas ao modelo teórico do transformador. Neste caso, as retas foram traçadas de maneira que as indutâncias próprias sejam de, aproximadamente, 0,003 H para o enrolamento 1 e 0,0009 H para o enrolamento 2. Em baixas frequências, a curva de magnitude coincide com a reta de referência, ao ponto que em altas frequências — acima de  $10^5$  rad/s — ela começa a divergir. Dessa forma, pode-se confirmar a coerência entre os dados experimentais e o modelo ajustado com o comportamento do transformador descrito pelo modelo teórico simplificado, em regime de frequência nominal.

**Figura 36 – Transferência de tensão com dados ajustados — Estudo de Caso 3.**



**Fonte:** Autoria própria.

**Figura 37 – Curvas de aderência ao modelo teórico — Estudo de Caso 3.**



**Fonte:** Autoria própria.

Concluídos os ajustes e as validações de todos os estudos de caso, verifica-se na Tabela 3 os valores de NRMSE obtidos para cada conjunto de dados estudado.

Observa-se que o menor valor de NRMSE é obtido no estudo de caso com dados sintéticos. Esse comportamento era esperado, pois os dados sintéticos são gerados diretamente a partir de um modelo matemático ideal, isento de ruídos, imperfeições de medição e efeitos parasitários presentes em sistemas reais. Já nos estudos de caso com dados reais e experimentais, os valores de NRMSE permanecem muito próximos entre si, o que é coerente com

**Tabela 3 – Valores do NRMSE para cada estudo de caso.**

<b>Estudo de Caso</b>	<b>Valor do NRMSE</b>
Estudo de Caso 1	$2,324 \times 10^{-14}$
Estudo de Caso 2	0,0188
Estudo de Caso 3	0,0096

**Fonte:** Autoria própria.

o fato de ambos representarem medições de transformadores de potência — trifásico no primeiro caso e monofásico no segundo — cujas dinâmicas físicas são semelhantes e estão sujeitas a condições práticas de ensaio e limitações instrumentais.

### 3.3 Síntese

Neste capítulo, foram estabelecidos critérios de validação para determinar a coerência dos dados e dos modelos obtidos com o comportamento físico do transformador. Foram definidos três critérios: passividade, que considera o balanço energético do equipamento; transferência de tensão, que avalia a relação de transformação; e aderência ao modelo nominal de 60 Hz, que compara este modelo com os dados e o modelo ajustado via *Vector Fitting*.

Realizou-se, então, um ajuste introdutório com dados simulados, no qual o objetivo foi demonstrar o emprego do algoritmo no tipo de modelagem proposto. Em seguida, demonstrou-se a aplicação prática do algoritmo *Vector Fitting* na identificação de um transformador a partir de dados repositórios. Por fim, foi realizado um estudo de caso experimental, abrangendo desde a aquisição dos dados em parâmetros de espalhamento até a obtenção de um modelo validado segundo os critérios estabelecidos.

Com o intuito de quantificar a qualidade dos ajustes, empregou-se a métrica NRMSE para os três estudos de caso. Os valores obtidos foram:  $2,324 \times 10^{-14}$  para os dados sintéticos, 0,0188 para os dados reais e 0,0096 para os dados experimentais. Esses resultados evidenciam a precisão elevada do ajuste no caso sintético — decorrente da ausência de ruídos e imperfeições experimentais — e a boa qualidade dos ajustes nos estudos real e experimental, cuja ordem de magnitude dos erros é compatível com medições de transformadores de potência.

A análise desenvolvida evidencia que o método é uma ferramenta robusta, podendo ser utilizada em diferentes contextos de modelagem. Além disso, o modelo obtido via *Vector Fitting* mostrou-se capaz de reproduzir adequadamente o comportamento dinâmico do transformador, possibilitando a identificação de picos de ressonância e a investigação de fenômenos eletromagnéticos em altas frequências.

#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi apresentada uma metodologia de identificação de sistemas no domínio da frequência aplicada a transformadores de potência, realizada com base no ajuste racional de dados de resposta em frequência por meio do algoritmo *Vector Fitting*. Foram abordados diferentes aspectos teóricos relacionados ao método e desenvolvidos três estudos de caso: um com dados sintéticos, um com dados reais medidos por terceiros e um com dados experimentais de autoria própria, permitindo uma análise ampla das características e limitações do método proposto.

A abordagem teórica possibilitou o entendimento dos princípios matemáticos que fundamentam a formulação do algoritmo e elucidou conceitos que orbitam a aplicação proposta, como representações matemáticas de sistemas dinâmicos, modelos teóricos do transformador, além das estruturas e procedimentos de aquisição de dados.

O estudo de caso com dados sintéticos ilustrou a aplicação do algoritmo em um contexto controlado, no qual foi possível observar como a identificação é impactada pelos diferentes parâmetros definidos, em especial, a ordem do modelo gerado. Já o estudo com dados reais evidenciou as dificuldades que surgem ao modelar sistemas a partir de medições, que apresentam ruídos e imprecisões inerentes, ao passo que o estudo experimental validou a capacidade do método em produzir um modelo que reproduz o comportamento eletromagnético capturado nas medições de campo.

Os resultados obtidos, fundamentados pelos critérios de validação realizados — análise de passividade, transferência de tensão e aderência ao modelo nominal — demonstraram que o método é eficaz em gerar um modelo racional capaz de representar as propriedades dinâmicas do equipamento e que pode ser utilizado em simulações no domínio do tempo, em programas de transitórios eletromagnéticos (EMTP).

Sendo assim, conclui-se que o algoritmo *Vector Fitting* constitui uma ferramenta confiável para a identificação de sistemas de transformadores de potência com base em dados de resposta em frequência. Como perspectivas para trabalhos futuros, sugere-se a expansão do processo de identificação para outros equipamentos e sistemas dinâmicos, bem como a realização de simulações no domínio do tempo de modelos obtidos por meio deste método, incorporando técnicas de *passivity enforcement*.

## REFERÊNCIAS

- AMIRI, M. V. *et al.* New order selection technique using information criteria applied to siso and mimo systems predistortion. **International Journal of Microwave and Wireless Technologies**, Cambridge University Press v. 5, n. 2, p. 123–131, 2013.
- CLARKE, A. C. **Profiles of the Future: An Inquiry into the Limits of the Possible**. New York: Harper and Row, 1962. Contém a Terceira Lei de Clarke: “Any sufficiently advanced technology is indistinguishable from magic.”.
- DESCRIJVE MICHAL MROZOWSKI, T. D. D.; ZUTTER, D. D. Macromodeling of multiport systems using a fast implementation of the vector fitting method. **IEEE MICROWAVE AND WIRELESS COMPONENTS LETTERS**, v. 18, n. 6, p. 383–385, 2008.
- FITZGERALD, A. E.; JR., C. K.; UMANS, S. D. **Electric Machinery**. 7. ed. New York: McGraw-Hill Education, 2003.
- GUSTAVSEN, B. **User's Manual for Vector Fitting**. [S.I.], 2013. SINTEF Energy Research. Disponível em: <https://www.sintef.no/projectweb/vectorfitting/>. Acesso em: 21 jun. 2025.
- GUSTAVSEN, B. Wide band modeling of power transformers. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 19, n. 1, p. 414–420, 2004.
- GUSTAVSEN, B.; SEMLYEN, A. Enforcing passivity for admittance matrices approximated by rational functions. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 16, n. 1, p. 97–104, 2001.
- GUSTAVSEN, B.; SEMLYEN, A. Rational approximation of frequency domain responses by vector fitting. **IEEE Transactions on Power Delivery**, New York v. 14, n. 3, p. 1052–1061, 1999.
- HOLDYK, A. *et al.* Wideband modeling of power transformers using commercial sfra equipment. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 29, n. 3, p. 1446–1453, 2014.
- JURISIC, B. *et al.* Difficulties in high frequency transformer modeling. **Electric Power Systems Research**, v. 138,, p. 25–32, 2016.
- Keysight Technologies. **E5061B ENA Vector Network Analyser**. [S.I.], 2025. Keysight Technologies. Acesso em: 14 nov. 2025. Disponível em: <https://www.keysight.com/br/pt/product/E5061B/e5061b-ena-vector-network-analyzer.html>.
- LJUNG, L. Perspectives on system identification. **Annual Reviews in Control**, Amsterdam v. 34, n. 1, p. 1–12, 2010.
- ONS. **Capacidade de Transformação da Rede Básica do SIN**, . 2025. Acessado em: 21 jun. 2025. Disponível em: <https://dados.ons.org.br/dataset/capacidade-transformacao>.
- PINTELON, R. *et al.* Parametric identification of transfer functions in the frequency domain—a survey. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 39, n. 11, p. 2245–2260, 1994.
- SCHIJNDEL, A. van. **Power Transformer Reliability Modelling**. 2010. Tese (Doutorado) — Technische Universiteit Eindhoven Eindhoven 2010. Acesso em: 01 dez. 2025. Disponível em: <https://doi.org/10.6100/IR675774>.
- SINTEF. **Vector Fitting - SINTEF**, . 2025. Acesso em: 30 jan. 2025. Disponível em: <https://www.sintef.no/en/software/vector-fitting/>.

TEKTRONIX. **Introduction to VNA Basics**. Beaverton, 2016. Tektronix. Acesso em: 21 jun. 2025. Disponível em: <https://www.tek.com>.

ZADEH, L. A. From circuit theory to system theory. **Proceedings of the IRE**, v. 50, n. 5, p. 856–865, 1962.